

棒の引張・圧縮変形問題の解答

作成 2003年9月21日

最終修正日 2003年10月6日

萩原芳彦

問題 1・1

- (a) 棒は引き伸ばされる (図 1. 1. 1)。すなわち、 l は増加する。同時に、棒は細くなる。すなわち、 h は減少する。なお、力の作用点は集中力を受けているため、変形状態も激しくなることも想像されるが、鋼製棒の通常の使用状態ではその変形は一般に目立たない。図は解析結果の変形を 100 倍に拡大してある。この場合の実際の変形は図 1. 1. 2 のようになり、変形はほとんどわからない。
- (b) 棒の長さは短くなる (図 1. 1. 1)。同時に幅は広がる。
- (c) 棒の変形はおおむね a の場合と同じであるが、力の作用の仕方が異なるため、作用点部分では (a) と異なり、変形が一様となる。

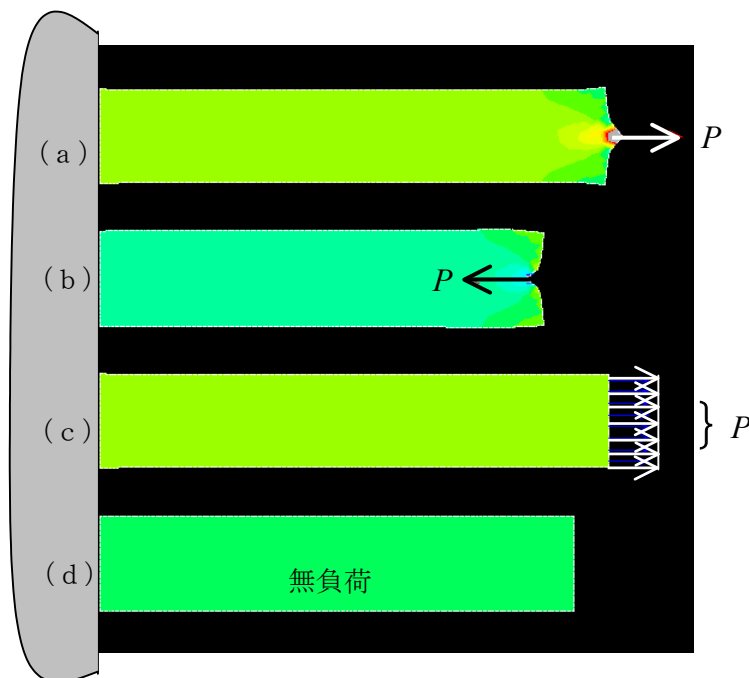


図 1. 1. 1 変形を 100 倍に拡大しての表示

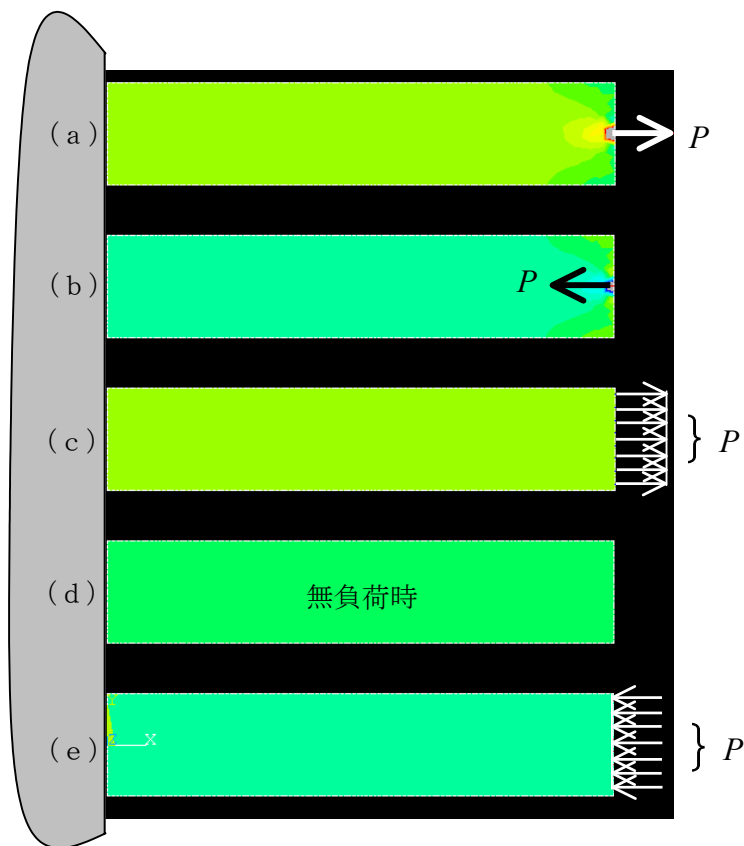


図 1・1・2 変形を等倍で表示した場合

詳細解説：

棒は伸ばされると断面積はやや縮小する (h は減少する)。逆に棒を圧縮すると断面積は増加する。その程度を示すのがポアソン比 (p. 14) であり、材料ごとに実験によって求められる。

図 (a) (b) のように、1 点に集中力を作用させれば当然作用個所には大きな力がかかることになりその個所の変形も大きくなる。現実にはこのように 1 点 (点は面積をもたない) に力を作用させることはできず、ある程度の範囲 (面積) に力を作用させて引っ張ったり、圧縮したりすることになる。その例が (c) の分布力によって引っ張った場合であり、この例では等価な分布力を端の全面に均等に作用させている。この場合、力の作用個所での変形は一樣となる。(c) の力の総和は (a) の場合と等しく、合力の作用点も一致しているので力の作用点近傍での変形は異なるものの他の場所での変形状態などに違いは認められない。

図中の色分けは各場所での棒の長手方向の伸縮（正確には変形ではなく垂直応力）の大小を示しており、赤に近いほど伸びが大きく、また青に近いほど縮みが大きいことを示す。力の作用点近傍で（a）には変形に乱れがあるが、それ以外のところでは（a）と（c）の違いは認められない。

初等材料力学における解析結果は力の作用しているところから十分離れたところについて正確であり、力の作用個所や支持個所近傍での正確な解析はできない。これらの個所での解析は弾性論、塑性論あるいはこれらの理論に基づいてコンピュータを利用した解析である本ホームページに示した有限要素法などによってなされる。ただし、有限要素法解析あるいは得られた結果の解釈を正しく行うには初等材料力学の知識が不可欠である。

以下に本解析での詳細条件を示す。

解析は有限要素法 2次元弾性解析（6 節点、3 角形要素）によった。材料は鋼とし、縦弾性係数 206 GPa 、ポアソン比 0.28 である。棒の断面形状は長方形であり、長さ l を 100mm 、断面は幅 b を（図における奥行き、すなわち紙面に垂直方向） 10mm 、高さ h を 20mm としてある。また、作用させた力 P は 30kN である。

この条件の場合、断面に生ずる平均の応力（応力の定義などは教科書参照）は（a）の場合 150MPa となり、この程度において鋼は破壊することはない。比較的強度の低い鋼でも塑性変形を起こす応力は 200MPa 程度以上であり、引張り破壊するときの応力も 400MPa 程度はある。

図 1・1・2 は変形倍率を 1 としたときの表示結果であり、今回の条件では変形を肉眼で観察することが難しいこともわかる。

問題 1・2

作用している力が等しくても、棒の伸び縮み量は長さによって異なる。長い方が伸び量は大きい。このことから、物体の伸縮を考えると、基準として伸縮量をとるのではなく単位長さあたりの伸縮量（垂直ひずみ）を用いなければ比較が正しくできないことがわかる。棒は引っ張られているので、断面積は減少する。

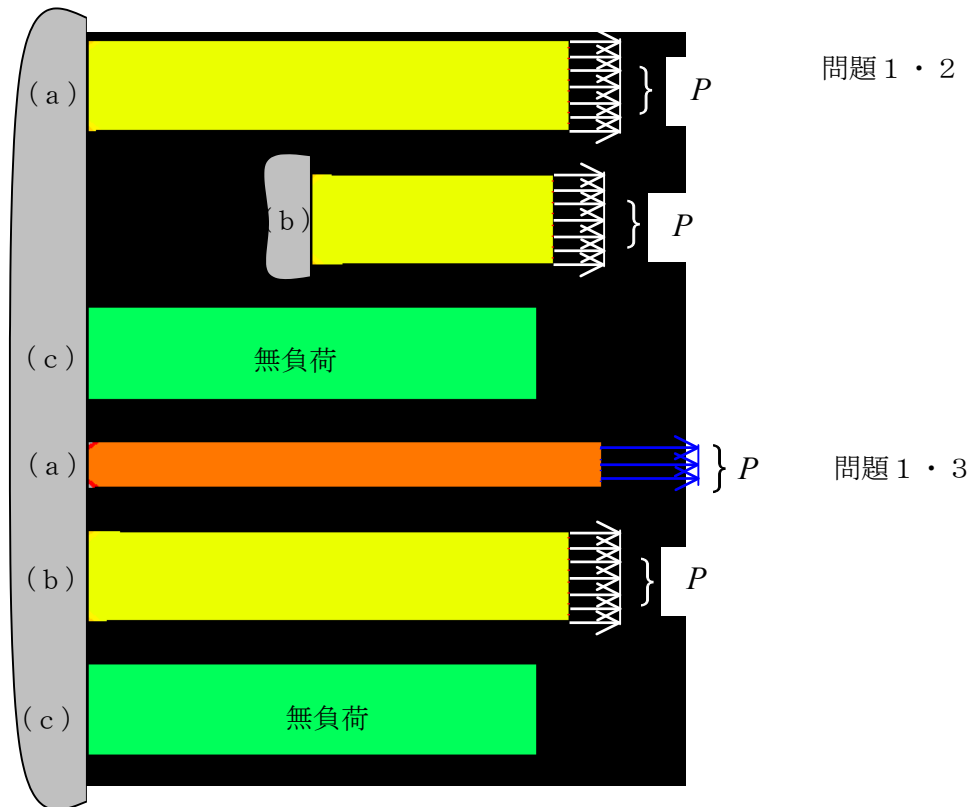


図 1・2, 3・1 問題 1・2 および問題 1・3 の 100 倍での変形図

問題 1・3

太さの異なる棒を同じ力で引っ張った場合、細い棒の伸び量が大きくなる。このことから力が大きければ伸びは大きくなるとは一般には言えないことがわかる。すなわち、物体の断面積の大小も考慮しなければ伸びやすさを比較することはできない。

この例から、物体の変形を考えると、物体に作用する力の大きさを基準として考えるのではなく、単位面積あたりの内力（すなわち応力、p. 9 参照）を基準に考える必要があることがわかる。

問題 1・4

- (a) AC間は伸縮なし。CB間は縮む。
- (b) AC間は伸びる。CB間は伸縮なし。
- (c) AC間は伸びる。CD間は伸縮なし。DB間は伸びる。

AC間の伸びよりもDB間の伸び量のほうが大きい。

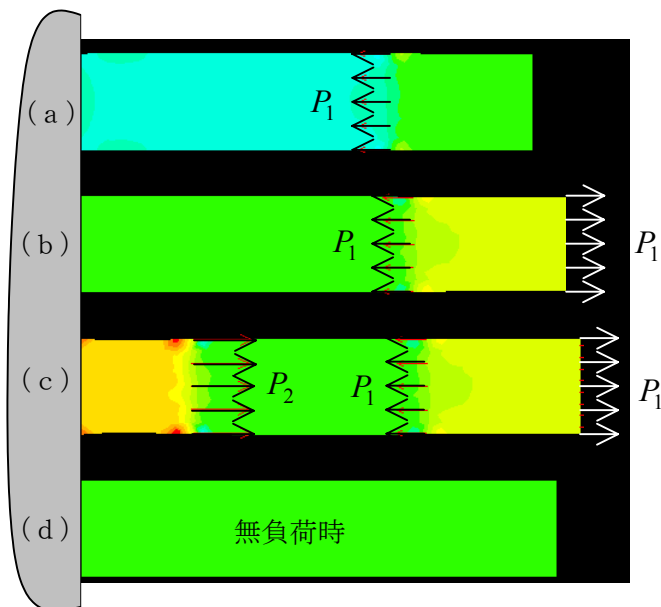
棒の伸縮は直近に作用している力だけで決まるのではないことがわかる。すなわち物体の変形は変形を考える断面の左右いずれか片側に作用する力の総和に依存する。

(a) AC間ではどの場所でも片側(右側)の力の総和は零であり、伸縮しない。CB間では片側(右側)の力の総和は P_1 であり、これによって縮む。B端には右向き反力($R = P_1$)が作用する。

(b) AC間では片側(右側)の力の総和は P_1 であり、これによって伸びる。CB間では片側(右側)に作用する力の総和は零($P_1 - P_1 = 0$)であるために伸縮しない。

(c) AC間では片側(右側)の力の総和は P_1 であり、これによって伸びる。CD間における片側に作用する力の総和は零であり伸縮しない。DB間の片側(右側)の力の総和は P_2 (2つの P_1 は相殺されて零になる)であり、これによってBD間は伸びる。

なお、以上では片側を右側を選んだが、左側で考えても同じである。その際、固定端Bに作用している反力のことを忘れないこと。なお、反力はa : $-P_1$ 、b : 零、c : P_2 となる。



図の色は棒の長手方向での伸縮状態を示している。

無負荷時は変形が零であるのでこの色と比較するとよい。また、力の作用箇所近傍では変形が乱れていることもわかる。

図 1・4・1 変形を100倍で表示

問題 1・5

棒は伸びる。AC間のほうがBC間よりも伸びる。図からわかるように、C近傍での変形には乱れが生じている。一般に、C近傍など断面形状が急激に変化する場所では変形に乱れが生じ、正確に初等材料力学で解析することはできない。図の色の変わり具合から断面急変の影響はその近傍の代表寸法（この場合棒の太さ）と同程度の範囲内で強く現れ、それより離れるとその影響は急速に弱まることわかる。

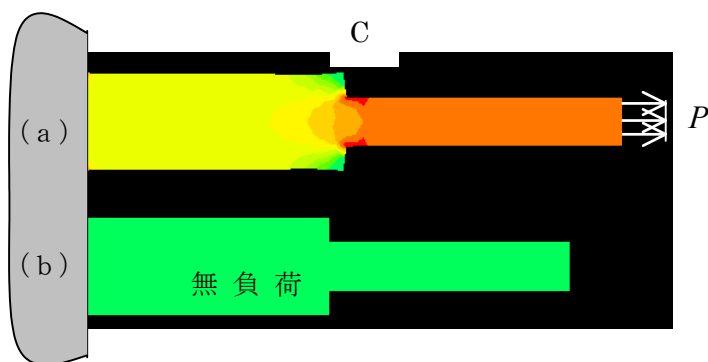


図 1・5・1 変形を 100 倍で表示

問題 1・6

棒は伸びる。棒の伸び量は場所によって異なる。また、図の色の变化からもわかるように棒の断面積が増加するに従って変形は減少する。図 (c)、(d) は細い棒、太い棒ともに総和が P なる分布力で引っ張っている。色の違いから変形状態を判断すると良い。なお図ではわずかではあるが、色の境目が曲面の変化をしている。初等材料力学からはこのような変化は求めることができない。

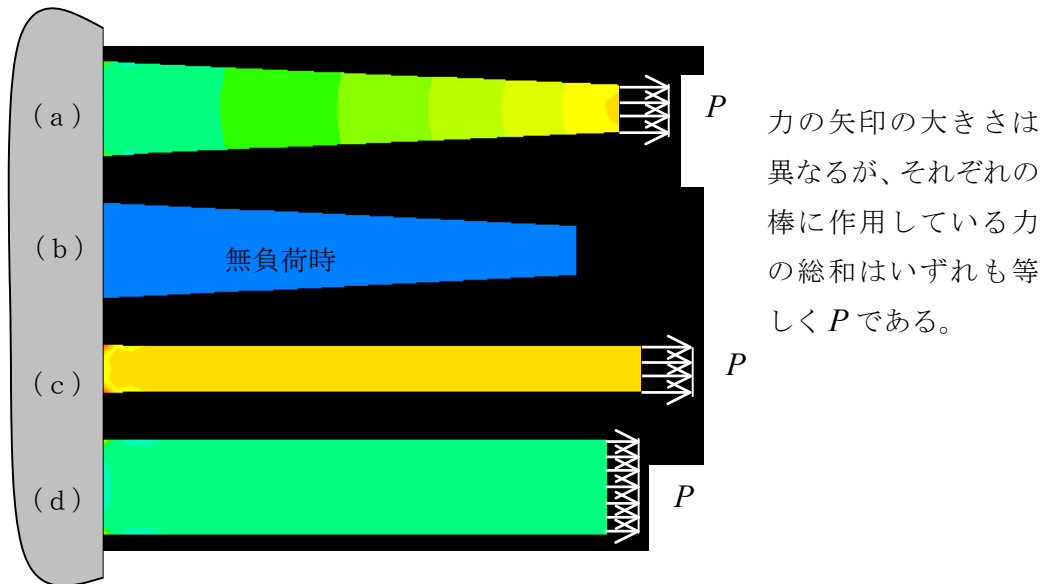


図1・6・1 変形を100倍で表示

問題1・7

図1・7・1の色の分布からわかるように、(a)、(b)の変形状態は力の作用点近傍以外では同じとなる。すなわち、等価な力の作用の下では力の作用のさせ方の違いは作用個所近傍だけとなり、離れたところでは変わらない。これをサンブナンの原理という。

(c)は(a)、(b)と力の総和は等しいが、合力の作用点異なるため、等価な力とはならない。すなわち、曲げモーメントが生じる。その結果、棒には(a)、(b)と同じ伸びが生じるだけでなく、曲げも生じる。合力が棒の中心になるように作用している(a)、(b)の場合には変形していることが変形図からはわからないが、合力が棒の中心からずれる(c)の場合には曲げ変形することが見られる。実際問題で力の作用の一寸したずれでも変形はかなり変わるので注意が必要である。

また、(a)、(b)における円孔近く以外での応力状態は円孔の無い図eの場合(等価な分布力を作用させた場合)と等しい(色が同じ)こともわかり、このような個所では初等材料力学の理論が適用できることも理解できるであろう。

なお、図1・5・1(a)でも認められたが、円孔部など断面形状が急激に変化するところでは変形の乱れが激しくなる(p. 20)。図1・7・1の円孔部の拡大ではないが、円孔付近を拡大したものを図1・7・2に示す。

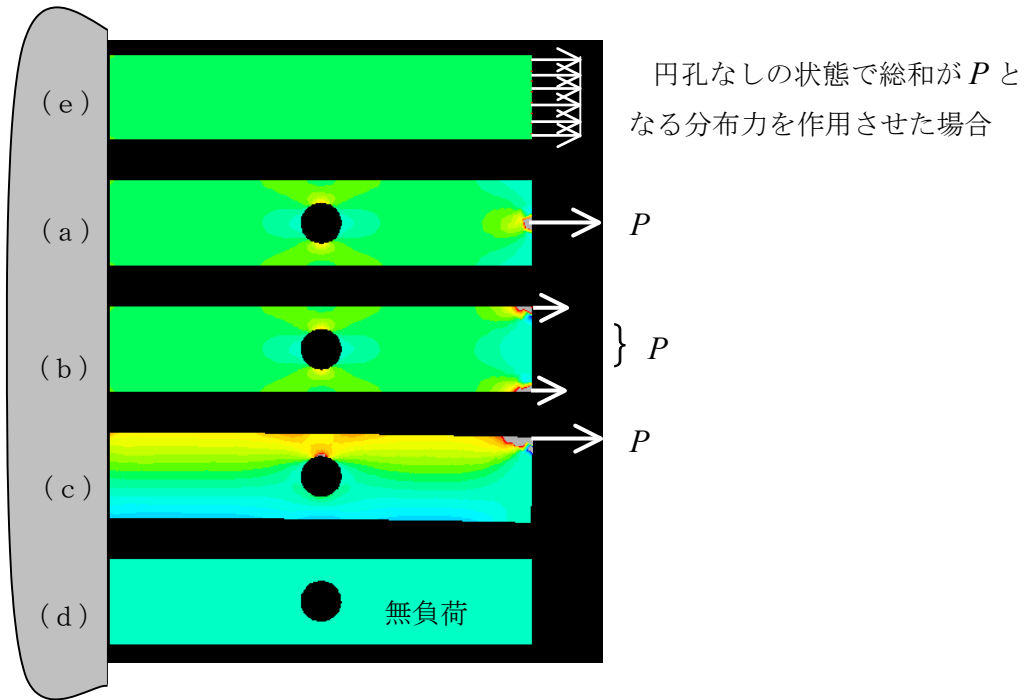


図 1・7・1 変形を等倍で表示

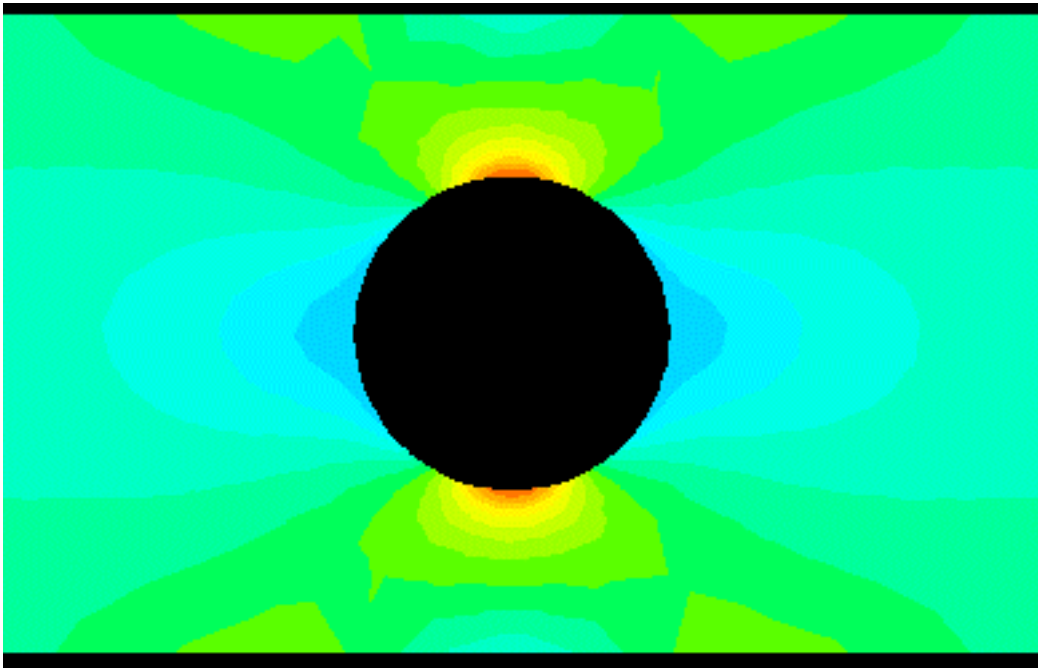


図 1・7・2

問題 1・8

図 (a) ~ (c) いずれの場合も BC 間では片側 (右側) に作用している力の総和は零であるから棒はこの区間では伸縮しない。ただし、この区間の片側 (右側) に作用している 2 力は偶力であるので、BC 間に対して曲げ変形を起こさせる。その値は (a) ~ (c) いずれも等しいので変形状態も BC 間では同じとなる。図 1・8・1 に色で示した変形の大小からもわかる。曲げ変形に関しては教科書 3 章以降にて詳細に説明する。

また、AC 間では片側 (例えば右側) に作用する力の総和は零ではないため、図 (a) では棒は伸びると共に曲がる。図 (b) では棒の伸縮は零であるが曲げやせん断変形が生じる。図 (c) では縮み、せん断、曲げ変形が生じる。ただし、AC 間は短く、実際には力の作用状態の影響を受けるため、この区間の変形状態の初等材料力学による正確な解析は難しい。

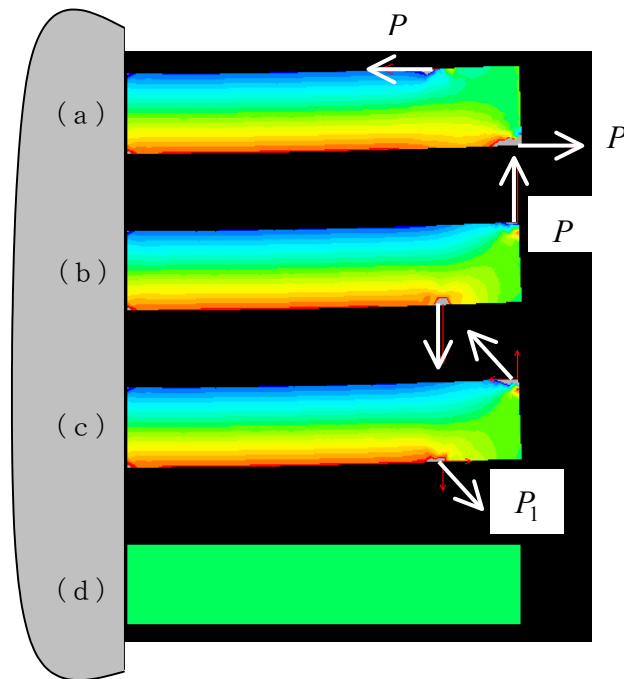


図 1・8・1 変形を等倍で表示