

第 1 1 章 解答

作成 2005 年 9 月 23 日

最終修正 2005 年 9 月 23 日

本章は物体の形状や材質あるいは外力の負荷状態などが対称状態であるか否かによって物体に生ずる応力や変形状態がどのようになるかを問題形式で示したものです。棒の引張り圧縮、曲げ、ねじりの基礎（教科書 1～8 章）を修得した後でないと正確に解くことができないものが大部分ですが、実際問題においてここに示すような結果が生ずることを定性的にあるいは現象的に知っておきたいだけであれば予備知識のない状態で読んでも理解することはできます。ここでの予備知識を持った上で材料力学の理論を学ぶこともひとつの学習方法です。

なお、本章の問題も、材料はすべてフックの法則に従う弾性範囲内にあるものと考え、解答例では変形を誇張して示したものもありますが、通常の機械・構造物の使用状態と同様に変形も微小変形状態を考えています。

参考のためにそれぞれの問題を正確に解くために必要な知識を扱った教科書「よくわかる材料力学」の章、節あるいは式番号などを示しておきます。

また、有限要素法の解析も微小変形の下での解析であり、数値結果には要素をあまり細かくとっていないことから、誤差が最大で数%程度はあることを考慮してください。

本章では応力集中に関して特に配慮していません。角部や集中力負荷部における応力の増加の程度（色の変化）はあまり大きな意味をもちません。応力集中については改めて別の章で取り扱う予定です。

問題 1 1 ・ 1

(a) 図 1 のほうが安全な状態である。

図 a、b において赤色に近いほど高い応力状態を示している。すなわち、①の部分は両者で違いはほとんど認められないが、②の部分では図 2 の場合において非対称形状のため、曲げが生じ、②の右側で高い応力状態となる。なお、①、②の結合部の角 E では図 a のほうが高い応力を示している。このように断面形状が急激に変化する個所では応力集中が生ずる。本解析ではこの角部に丸みなどを取っておらず、このような個所での厳密な検討は別の機会に譲る。

(b) 図 a、b のようになる。

(c) 図 1、2 の A、B における垂直応力はいずれも 50MPa となる。図 1 の C、D の垂直応力は 25MPa、図 2 の C、D 点では図 1 と同じ垂直応力のほかに曲げによる応力が -37.5MPa、37.5MPa となるため、垂直応力は -12.5MPa、62.5MPa となる。有限要素法の解析において、図 a の CD 断面で応力が一様とならず若干変化しているが、これは段の影響である。例えば C の軸方向応力は 22.2MPa であり、CD の中点では 27.3MPa となり、平均は 24.8MPa となる。なお、図 b の C は -12.1MPa、D は 62.6MPa となり材料力学の公式から求めたものとほぼ一致する。

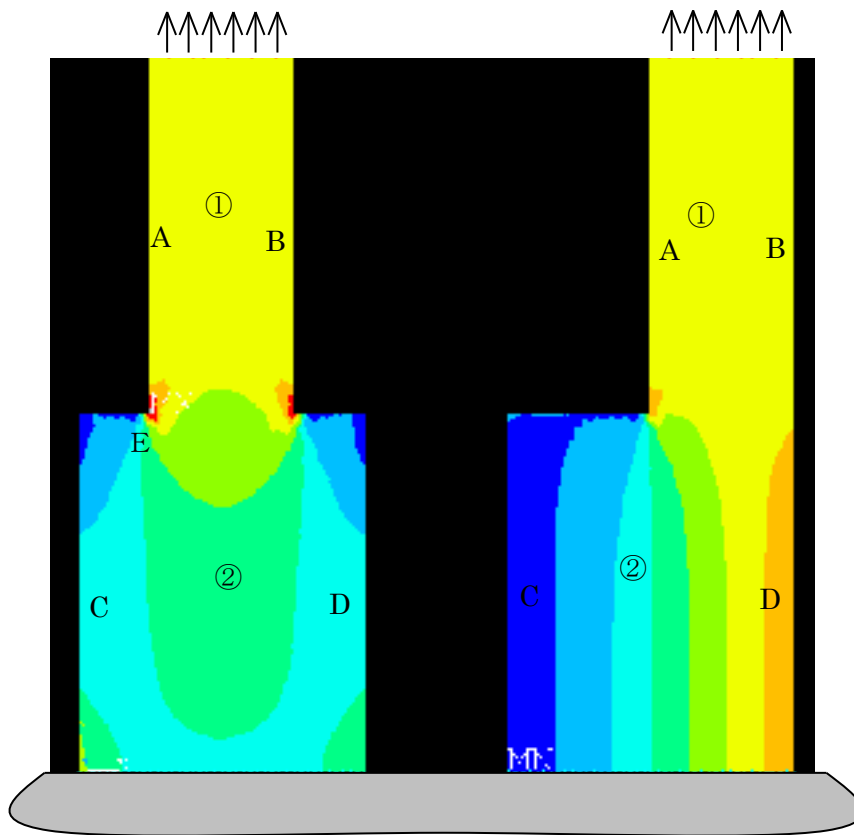


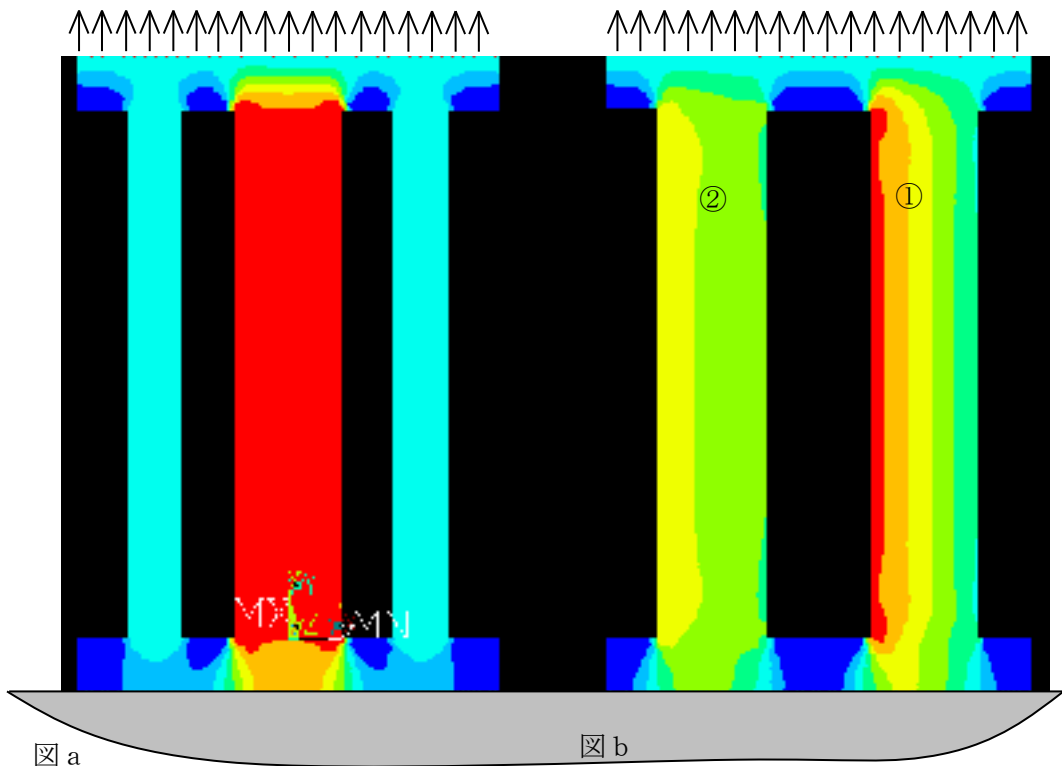
図 a

図 b

問題 1 1 ・ 2

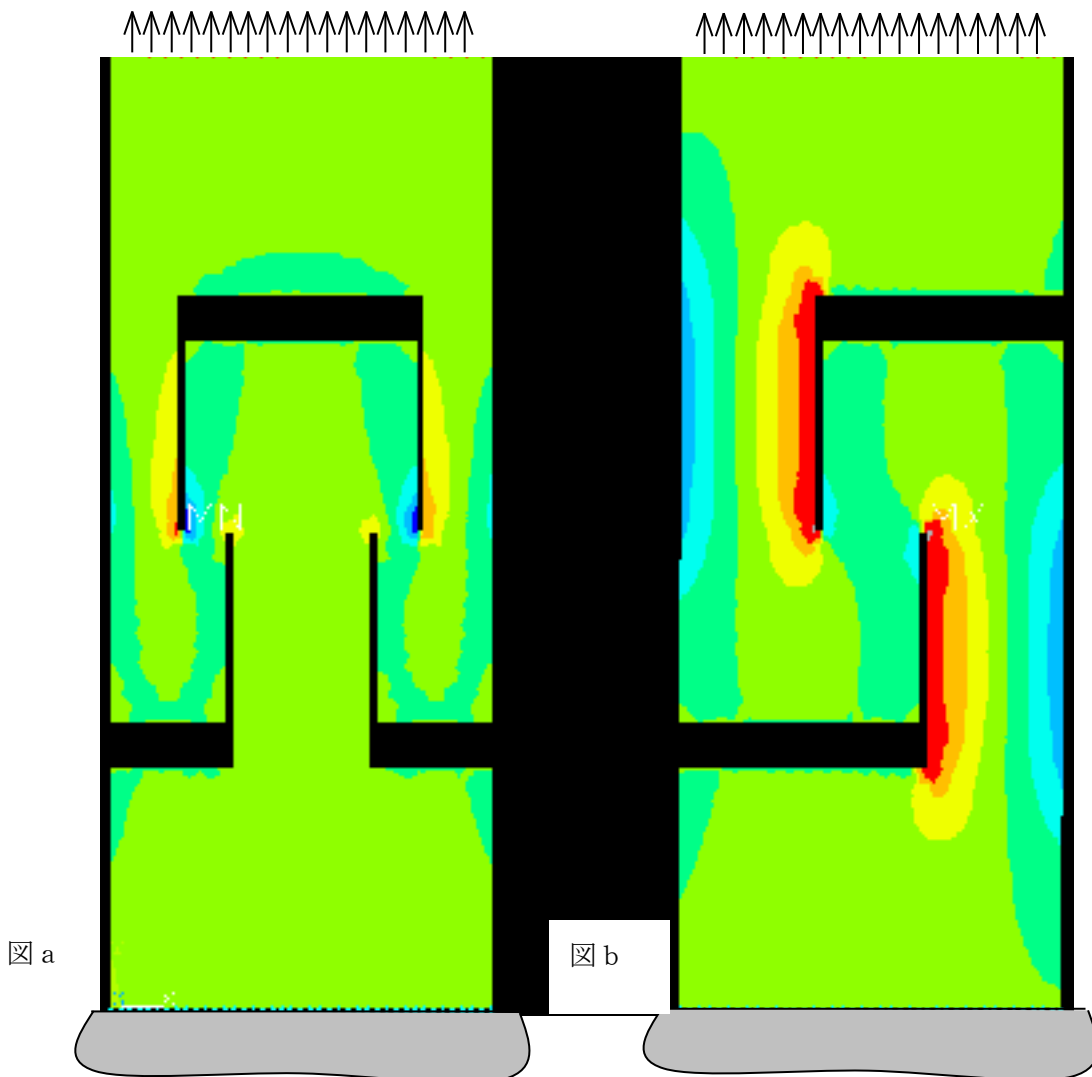
- (a) 図 1 のほうが安全である。この問題では①は鋼の縦弾性係数に近い値であり、②はアルミニウムの縦弾性係数に近い値である。図 1 の場合、左右対称形であり、図 a からわかるように、①のほうが高い応力状態となっている。一方、図 2 の場合には②の棒の縦弾性係数が低く、伸びやすいため棒には曲げ変形が生じ、図 b のようにいずれの棒も左側表面のほうが高い引張り応力を生じている。②の棒は対称形の場合に比べて高い応力を受けており、全体に対称形よりも危険な状態と考えることができる。なお、ここでは弾性問題として考えているが、仮に②の方が降伏応力や引張り強度が高いのであれば結論は異なることもある。
- (b) 図 1 の場合、引張り応力は①が 150MPa、②が 50MPa となる。(教科書 3 2 ページ 例題 2 参照)

なお、図 2 (図 b) の場合には曲げの影響があり計算は厄介であるが、有限要素法による解析結果を示せば、①の左側表面が 150MPa、右側表面が 60MPa、②の左側表面が 110MPa、右側表面が 60MPa となる。



問題 1 1 ・ 3

- (a) 棒の引張り及び曲げの公式から求められる応力は同じとなる。しかし、図 1 の場合左右の A 部は接触部を介して C 部から曲げを抑制する力を受け、実際には低い応力に抑えられ、より安全である。図 a、b は y 方向（上下方向）垂直応力の分布を示しており、その状況がわかる。図 c、d は接触の影響を無視した場合である。赤に近いほど高い応力を示しており、図 c、d の最大応力に差がないことがわかる。
- (b) B 部は単純な引張り応力だけであり、 28.6MPa となる。
- (c) A、C 部は引張り応力と曲げ応力の和になり、材料力学の公式によれば、いずれも軸力による引張り応力 28.6MPa と曲げ応力 $\pm 159.2\text{MPa}$ （内側、外側）が求まる。したがって、A、C 部いずれも外側が -130.6MPa 、内側が 187.8MPa となる。しかしながら、実際には(a)に説明したように、図 1 の場合、応力は低めとなり、この問題の場合、B 部が完全に A 部と結合しているものとして有限要素法により求めれば、A 部中央での応力はおおよそ外側 -25MPa 、内側 83MPa となる。
- (d) C 部は A 部のような拘束はないため前項で示した値、 -130.6 、 187.8MPa となる。



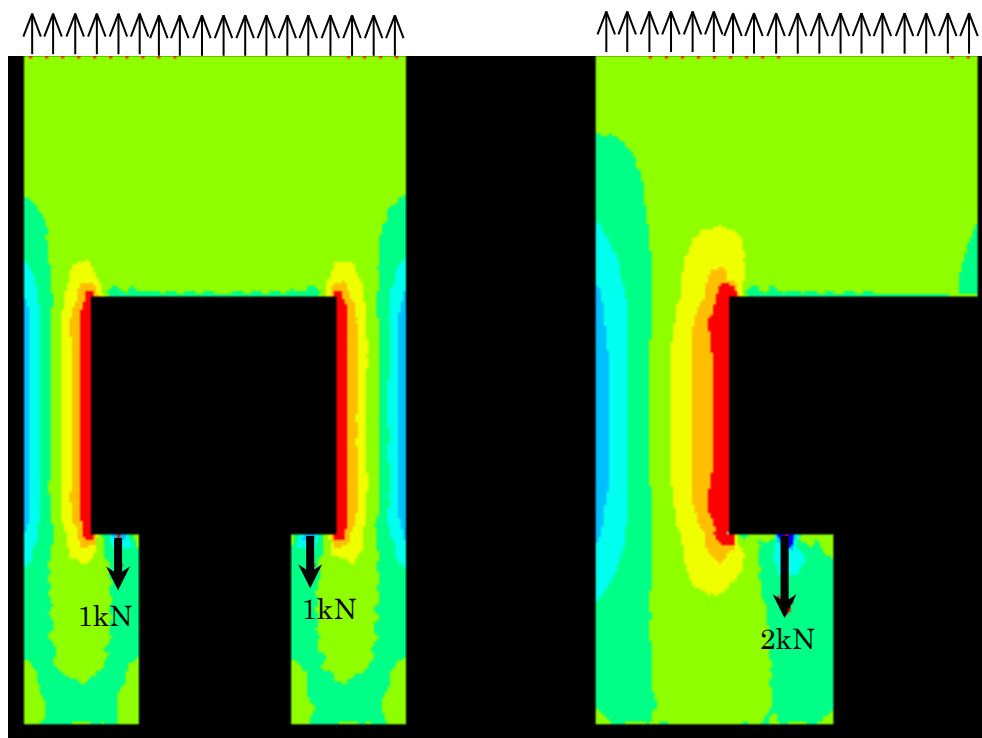


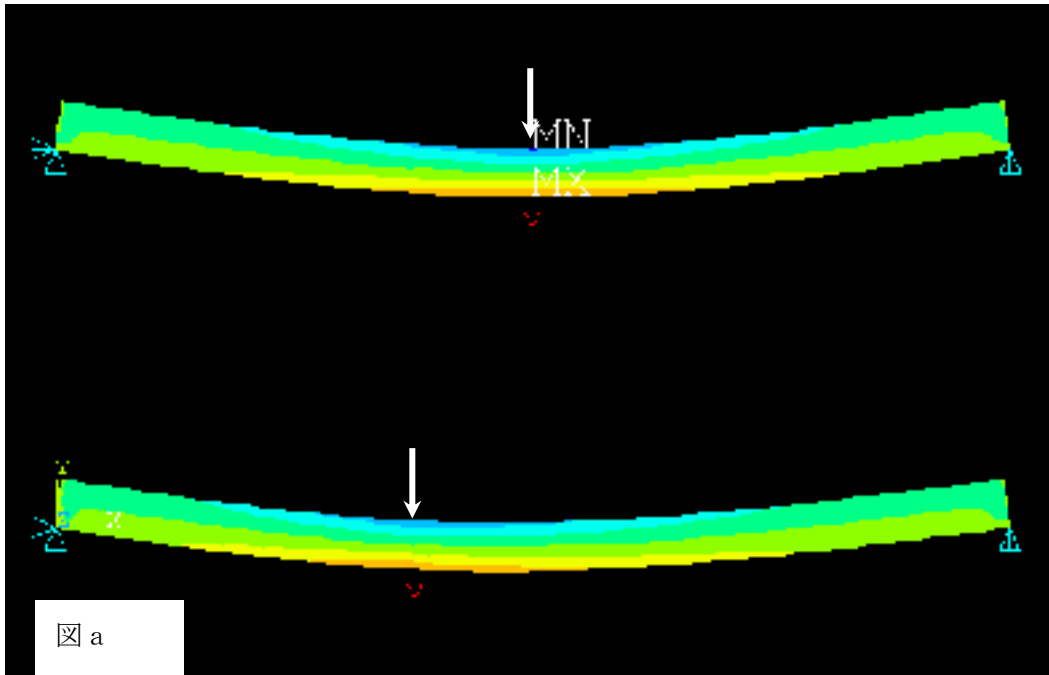
图 c

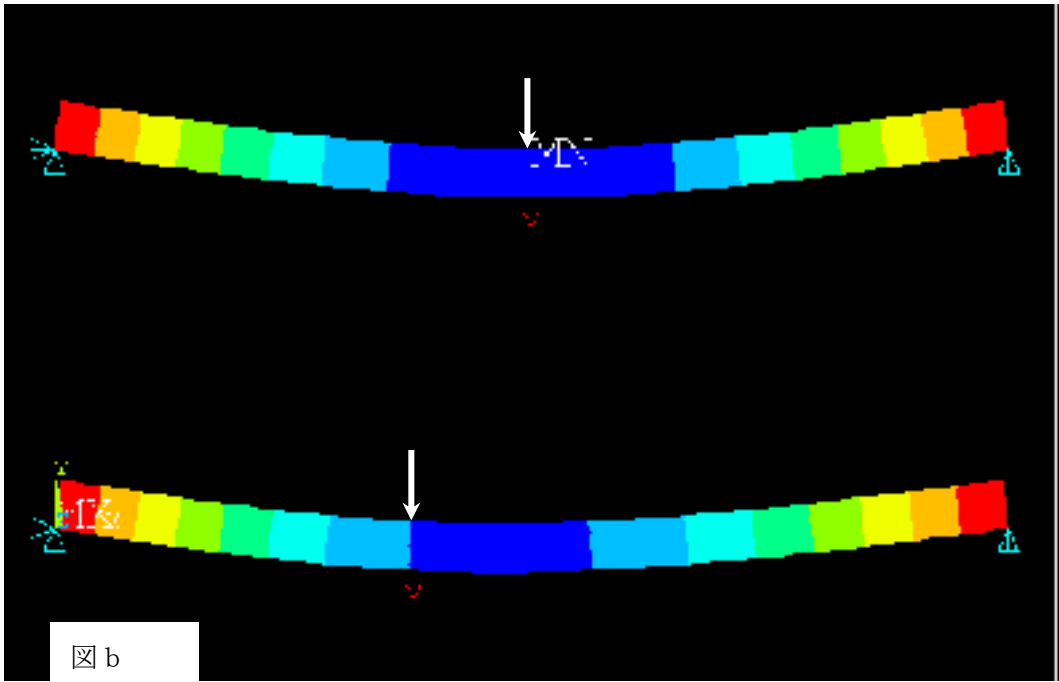
图 d

問題 1 1 ・ 4

- (a) 図 2 のはりの方が安全である。単純支持ばりに 1 つの集中荷重が作用する場合、曲げモーメントの最大個所は荷重負荷部の断面となる。また、荷重負荷部の曲げモーメントは荷重が中央にあるときに最大となる。ヒント：教科書式 (3・7) において x を a と置き、式を a で微分し、曲げモーメントの最大となるときの a を求めるとスパンの 2 分の 1、すなわち中央となる。
- (b) 図 1 の最大曲げ応力は C 点のはりの下側表面であり、値は 150MPa、図 2 の最大曲げ応力は D 点の下側表面であり、141MPa となる。図 a にその様子を示す。赤に近いほど高い応力状態を示す。

なお、最大のたわみ位置は図 1 の場合は C 点となるが、図 2 の場合は D 点ではなく、はりの中央よりやや左側の地点で生ずる。図 b にその様子を示す。青色に近いところほどたわみは大きいことを示す。

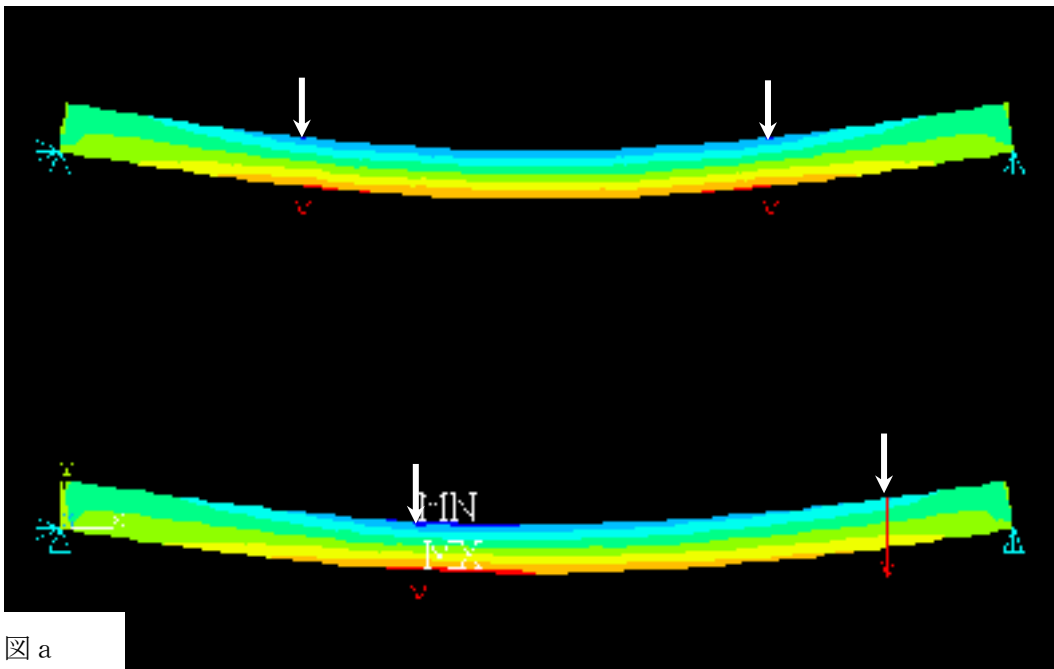


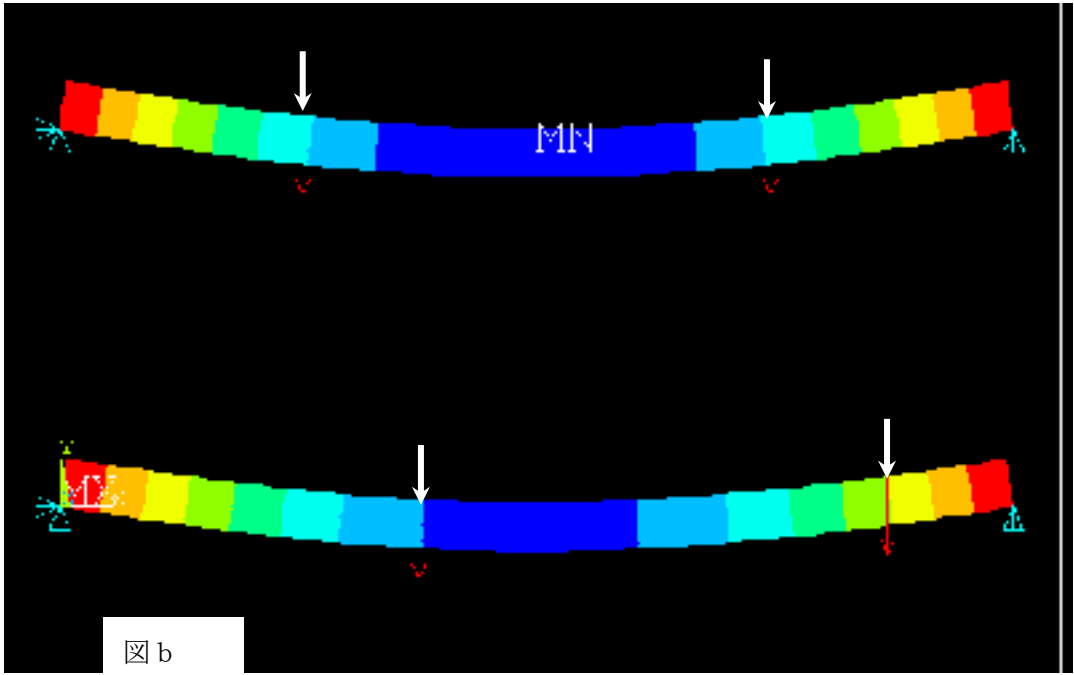


問題 1 1 ・ 5

- (a) 図1のほうが安全である。図2が一番危険な位置となる。一般に間隔を一定、 a 、とした2つの荷重がスパン l の単純支持ばりの上を移動する場合、はりのスパン中央をはさんで一方の荷重が片側から $\frac{l}{2} \pm \frac{a}{4}$ にあるときに最大の曲げモーメントが生ずる。証明してみよ。例えば自動車が橋を渡るとき、前輪は橋の中央を越えた状態で全体が中央よりやや手前に来た時に最大の曲げ応力が生ずることになる。
- (b) 図1の場合、CD間は曲げモーメントが等しく、この間の曲げ応力は150MPaとなる。図2の場合にはC点が最大曲げモーメントの位置となり、曲げ応力は169MPaとなる。

なお、たわみの最大位置は図bに示すように図1の場合のはりの中央であり、図2の場合にははりの中央より左側にわずかにずれた位置となる。





問題 1 1 ・ 6

- (a) 丸軸が最も応力は低くなる。図 a ~ c はそれぞれの棒をねじったときの状態であり、左側端面を固定し、右側端面には剛体の正方形板を取り付け、矢印で示した一对の偶力 (2kNm) を作用させる。図の色は棒表面の最大主応力の分布を示しており、赤色に近いほど高い応力状態を示しており、丸棒が一番低い応力となる。また、角棒では応力が高くなるのは辺の中央であり、長方形の場合長辺の中央が最も高くなる。長方形の場合、長辺が左端の剛体の寸法と余り変わらない長さのため軸の場所によって応力に分布が生じているが、円形や正方形の場合には棒の長手方向で応力に変化はあまりなく、ほぼ一様となっている。なお、横断面の応力状態は図 d ~ f に示すようになり、図の解析では要素が粗いためあまり精度は良くないが、円形の場合中心からの距離に比例して応力が増加すること、長方形の場合は長辺の中央で最大となることなどがわかる。
- (b) 表面全体で一様であり、112MPa (式 7 ・ 1 5) となる。
- (c) 正方形の場合辺の中央で最大となる。値は 150MPa (式 7 ・ 3 7) である。
- (d) 長方形の場合長辺の中央で最大となる。値は 168MPa (式 7 ・ 3 7) である。

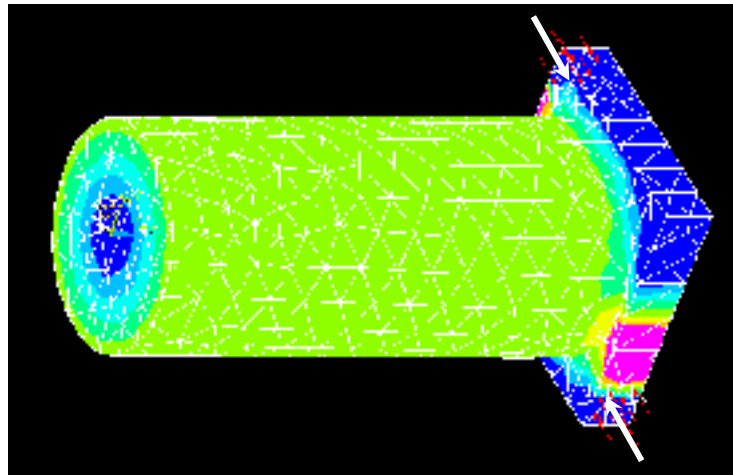


図 a

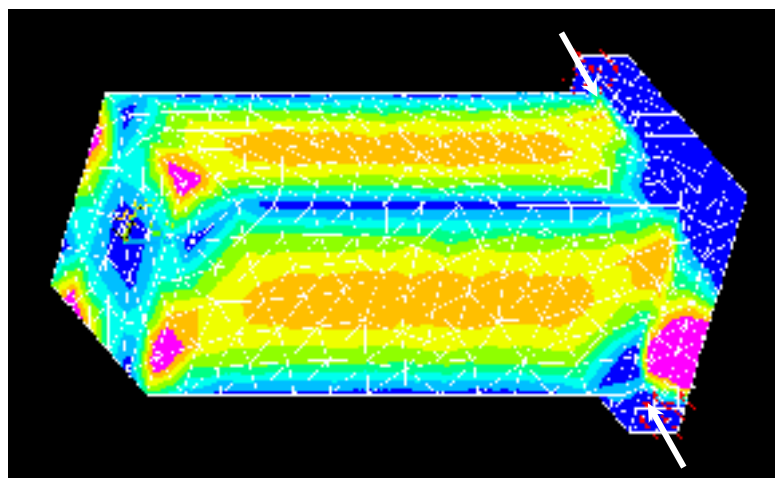


図 b

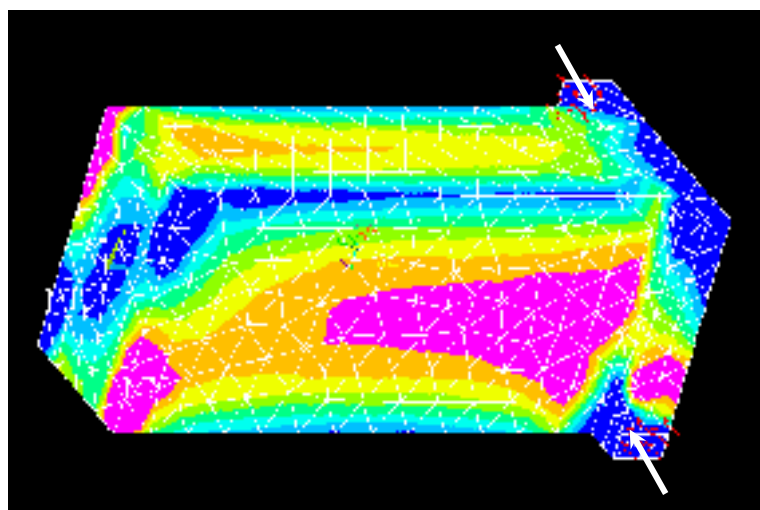


图 c

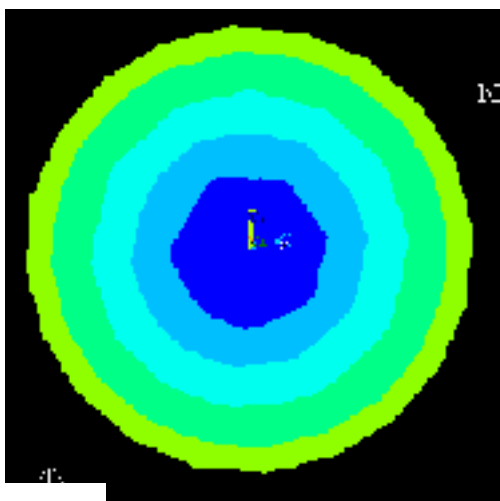


图 d

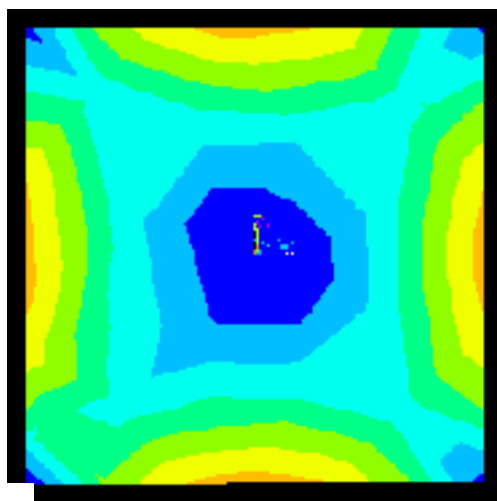


图 e

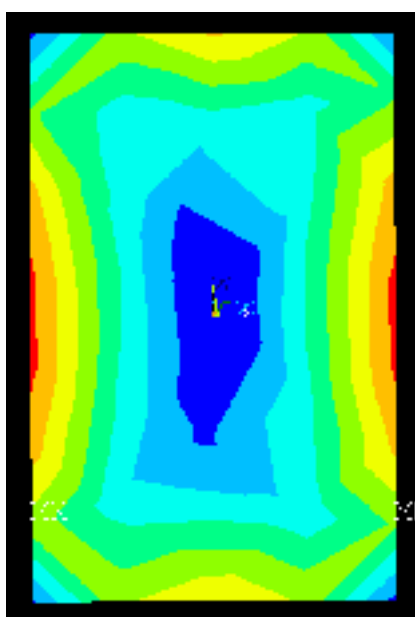


图 f

問題 1 1 ・ 7

- (a) 図 1 のほうが安全である。
- (b) 図 a , b のようになる。有限要素法による解析結果から図 a の円孔左右の表面での応力は 315MPa、図 b の円孔の左側表面は 342MPa、右側表面は 401MPa となり、板の表面に近い方の応力は高くなる。

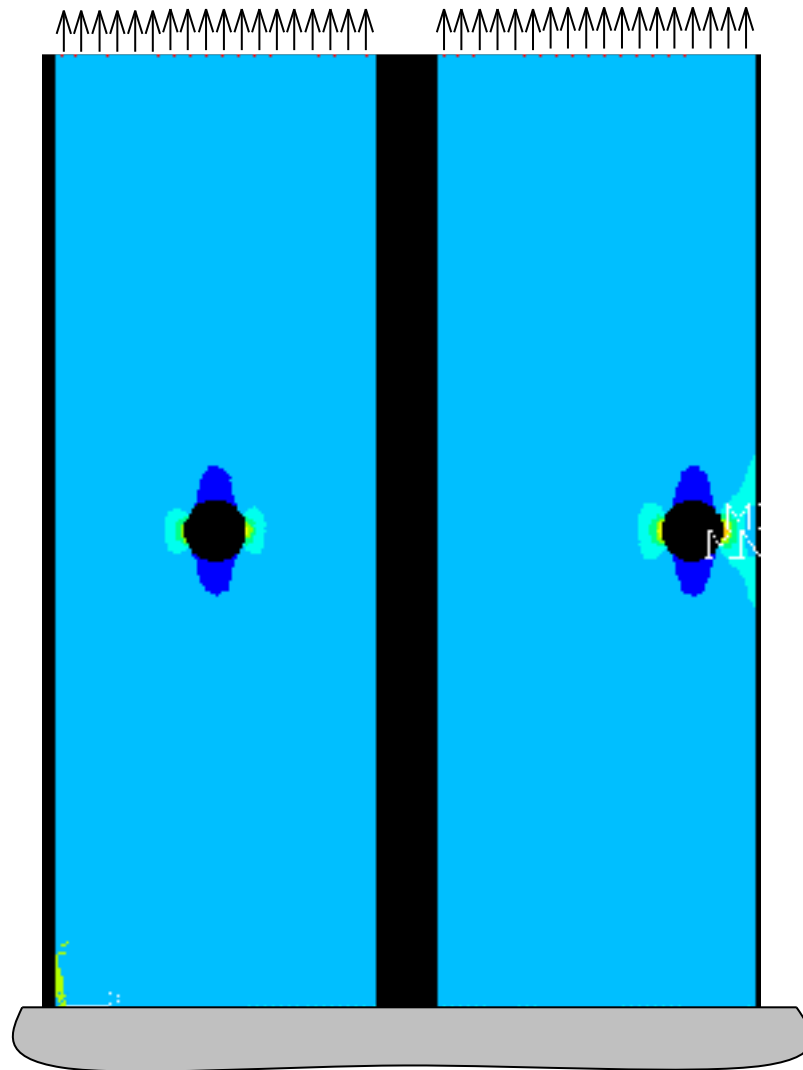
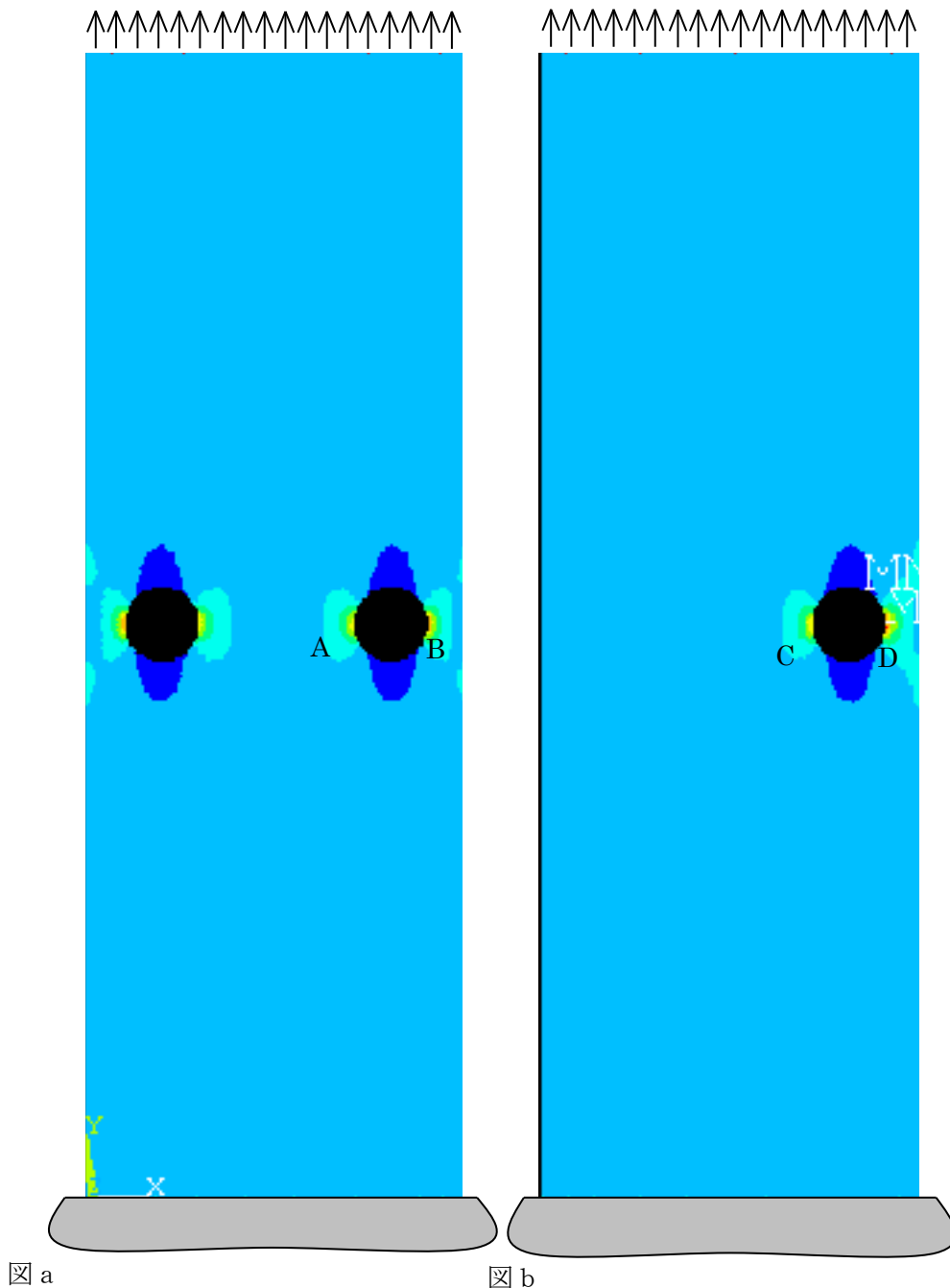


図 a

図 b

問題 1 1 ・ 8

- (a) 図 1 のほうが安全な状態となる。いつもと言うわけではなく、板の幅と円孔の直径の関係や円孔の板中心からのずれの程度による。すなわち、円孔部での正味断面積は図 1 の場合 60mm^2 であり、図 2 の場合の 80mm^2 よりも小さいため円孔部での平均の応力（公称応力）は図 1 の場合が 167MPa となり、図 2 の場合の 125MPa よりも大きくなる。しかし、円孔表面での応力集中は図 2 のほうが強く、高い応力が生ずる。
- (b) 図 a、b に示すようになる。図 b の円孔の右側表面 D が最大となり、 405MPa 、C は 343MPa 、A 334MPa 、B は 383MPa となる。円孔の上下では圧縮の垂直応力が生ずる。



問題 1 1 ・ 9

- (a) 図2の方が安全である。円孔など断面形状が急激に変化するところでは応力集中が生ずる。この場合、図1のように上下に引張ると図aのように円孔の左右表面で最大の垂直応力（赤色）が生ずる。それと同時にポアソン比の影響で円孔の上下表面には横方向に圧縮の垂直応力が生ずる。一方、図2のように横方向にも引張ると円孔の左右表面には圧縮の垂直応力が生ずるためこの部分の垂直応力は上下の負荷による影響と相殺し全般にわたって減少し、円孔の周上で一様な最大主応力の分布となる。この応力の作用方向は円孔の周方向（接線方向）である。
- (b) (a)のことから図a、bのような最大の主応力分布となる。このように、上下左右に均等に引張ると円孔表面の周方向応力はどこでも等しくなる。
- (c) この場合の円孔表面での最大主応力（最大の垂直応力）の値（有限要素法）は図1の場合円孔の左右表面で生じ 335MPa 、図2の場合円周上で一様であり 207MPa となる。また、正味断面での応力集中係数はそれぞれ 2.68 、 1.66 となる。なお、図1の場合の円孔上下点での圧縮応力は -128MPa となる。

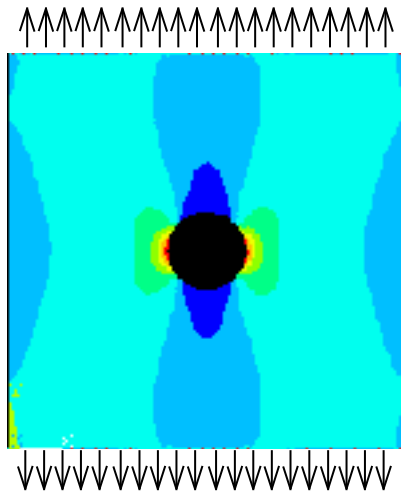


図 a

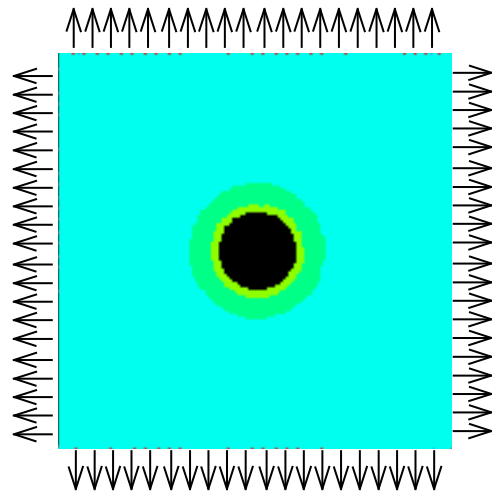


図 b