

第 55 話 簡単そうで簡単ではない曲げ問題

2009 年 6 月 10 日 作成

萩原芳彦

図 1 のように B において直角に曲げられた棒 AC の C を床に固定し、自由端 A に荷重 P を垂直下向きに作用させる。この時、A 点のたわみはどのようになるであろうか。この棒に生ずる軸力 N 、せん断力 F 、曲げモーメント M は、教科書、演習問題 3・7 と同じであるので、以下のようになり、その他の軸力やせん断力は零となる。

すなわち、AB 間の A から x の距離におけるせん断力と曲げモーメントは、

$$\text{せん断力} \quad F_{AB} = P \quad (1)$$

$$\text{曲げモーメント} \quad M_{AB} = Px \quad (2)$$

となる。

また、BC 間の B から x の距離における軸力と曲げモーメントは、

$$\text{軸力} \quad N_{BC} = -P \quad (3)$$

$$\text{曲げモーメント} \quad M_{BC} = Pa \quad (4)$$

となり、 x に関係なく一定となる。

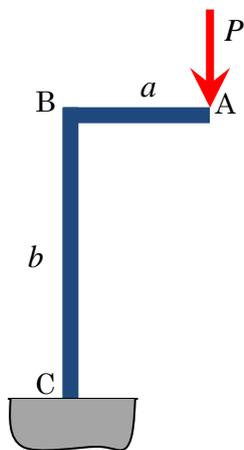


図 1

したがって、はりに生ずる応力は棒の断面形状がわかれば、棒の圧縮、曲げの問題として考え、それらの結果を重ね合わせて求めることができる。では、この棒のたわみはどのようになるであろうか。

まず、図 1 を図 2 のように分解して考えよう。複雑な形状の構造を解析するときには、力のかかり具合を間違えないようにするため、簡単な部分に分解して考えるとよい。B においては AB 部材と BC 部材の間の作用・反作用の力 F_B や力のモーメント M_B が生ずることになる。ここで、AB 間の力と力のモーメントのつり合い条件から、図中に示すように、 $F_B = P$ 、 $M_B = Pa$ となる。このように分解しても各部分は力学的には図 1 の場合とまったく同じである。

つぎにたわみを求めよう。分解した図において AB 部の B は教科書 3 章図 1(c) と力学的に同じであるから AB 部分は B を固定した片持ばりと考えてよい。したがって、B 点に対する A 点の相対的たわみ量 v_{BA} は、AB 間に作用する曲げモーメントが上述のように、 $M_{AB} = Px$ であるので、図 2 を参照しつつ、教科書 5 章、例題 1 から、

$$v_{BA} = \frac{Pa^3}{3EI} \quad (5)$$

となる。ここではせん断力によるたわみは少ないものとして無視している。

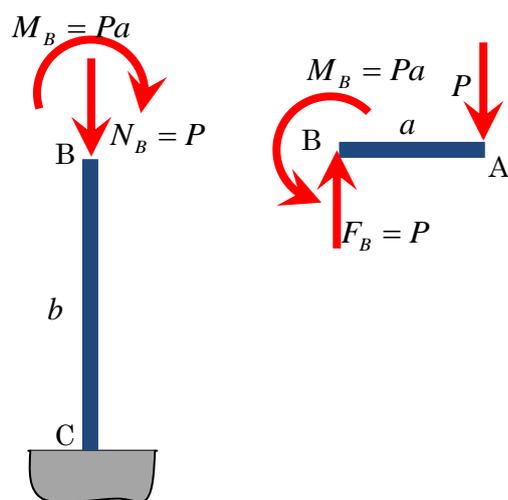


図 2

同様に、BC 間は C を固定し、B に Pa なる力のモーメントが作用している片持ばりと考えることができる。したがって、BC 部分のたわみの微分方程式は、教科書、式 (5・8) から、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Pa}{EI} \quad (6)$$

となる。この式から、B の C に対する相対変位、すなわちたわみ量 v_B は、

$$v_B = \frac{Pab^2}{2EI} \quad (7)$$

となる。なお、 v_B は図 2 においては B 点の水平方向の移動量である。また B 点のたわみ角 i_B は、

$$i_B = \frac{Pab}{EI} \quad (8)$$

となる。なお、実際には軸力、 $N_{BC} = -P$ により BC は縮むが、ここでは無視する。

これらの結果、図 1 の棒は図 3 のように変形することになる。すなわち、A 点の垂直方向の変位量は v_{BA} だけではなく、B 点がたわむことで回転するため、 $i_B a$ だけさらに垂直下方に移動することになる。したがって、A の垂直方向たわみ量 v_A は、

$$v_A = v_{BA} + i_B a = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2b}{EI} \quad (9)$$

となる。

別の解法として、教科書 9 章に説明する、ひずみエネルギー法を用いれば、AB、BC 部に蓄えられる曲げによるひずみエネルギー U は、

$$U = \frac{P^2 a^3}{6EI} + \frac{P^2 a^2 b}{2EI} \quad (10)$$

となるので、これを P で微分し、以下のようになり、上記の結果と一致する。

$$v_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2b}{EI} \quad (11)$$

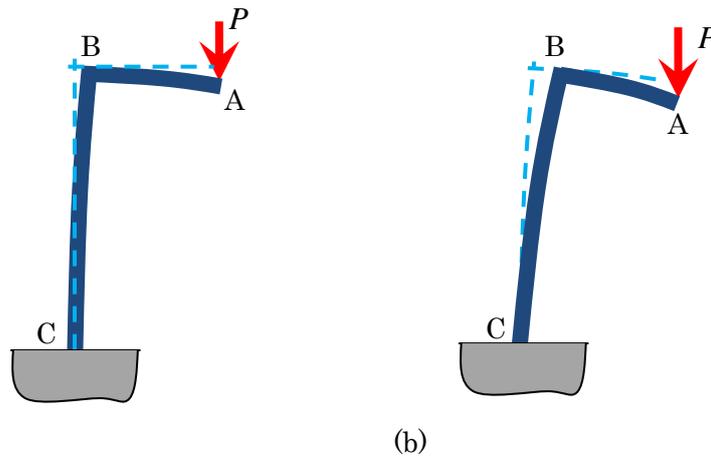


図 3

以上が微小変形の下で求められる結果である。初等材料力学で扱っている考えはここま
 でであり、たわみ量が少ない場合にはこの結果を用いた判断で実用上問題はない。しかし
 ながら、図 3(a)のように、はりがたわむと、荷重の作用点も移動するため、例えば BC 間に
 生ずる曲げモーメントの大きさは上述の Pa よりも大きくなり、また BC 間で一定にもなら
 ない。例えば、C における曲げモーメント M_C は、

$$M_C = P(a + v_B) \quad (12)$$

となる。したがって、その分はりに生ずる応力やたわみは増加することになる。

厳密な応力やたわみを求めるためにはこの変形した状態で再度計算をする必要がある。
 その結果、図 3(b)のように、さらなるたわみが生ずるので再々度の計算も必要になる。こ
 のように変形が大きくなるような場合、すなわち大変形問題においては正しい解を得るた
 めに何回も繰り返しの計算が必要になり、正しい解を得るのは大変である。このようなと
 き威力を発揮するのが有限要素法解析である。

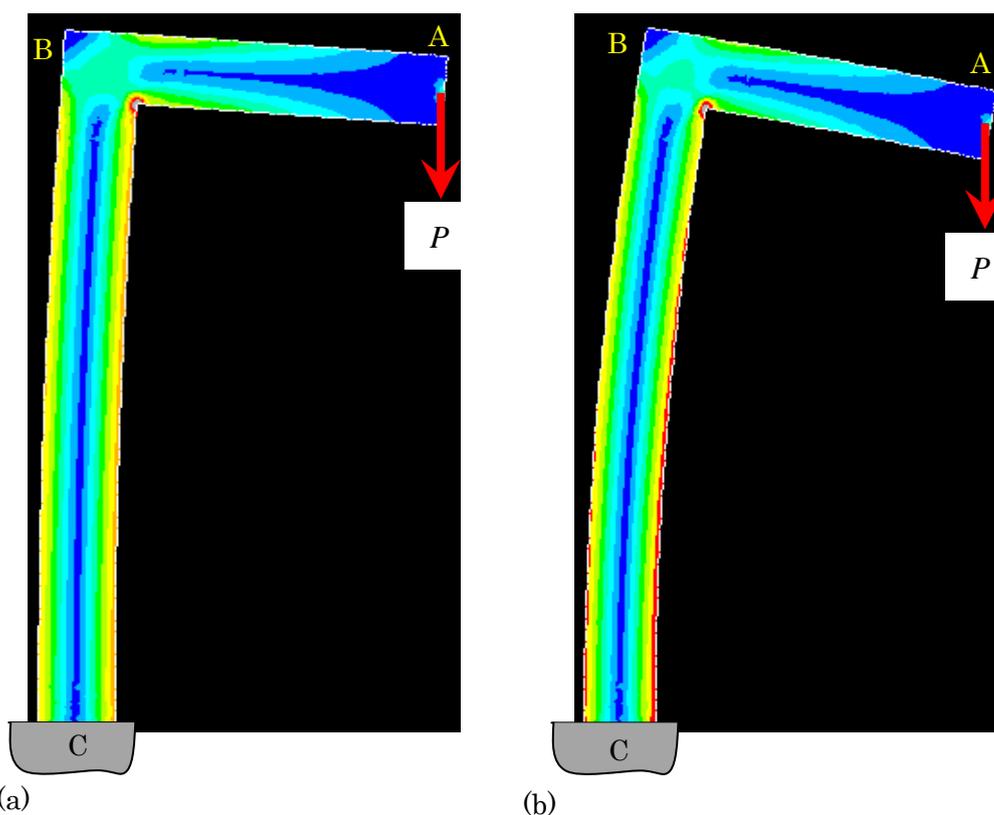


図 4

図 4(a),(b)はこのような問題を解析した有限要素法の結果である。詳細の説明は省略するが、図はミーゼスの応力分布表示で色分けしてある。この場合には黄色から赤側が変わるのに従いその場所の応力の絶対値が大きくなり、青側が変わるほど零に近づくと考えてよい。図 4(a)は式(9)や(11)の解析と同様に微小変形問題として解析したものである。荷重負荷後の変形の影響は考慮されていないため、BC間の色の分布はCからの距離に関係なく一様になっている。これに対して、図 4(b)は荷重負荷による変形も考慮しての大変形解析ソフトによる計算であり、BC間の色の分布に変化がある。すなわち、BからCに近づくほど赤色部分が増加している。式(12)を求めたことからわかるように、Cに近づくにつれ曲げモーメントが増加し、応力も高くなるのである。

なお、式(9),(11)の解析においては軸力の影響が考慮されていないが、有限要素法解析結果にはBC間での軸力の影響も含まれており、わずかではあるが図 4(a),(b)においてBC間の左右の色の分布が異なり、右側のほうが左側より赤みが増している。

以上は曲げ問題を例に、大変形問題の解き方や扱い方を説明したが、このことは曲げに限らず、すべての材料力学問題に共通することである。大変形問題を解析できる有限要素法解析ソフトを用いて材料力学の問題を解析すれば微小変形を基準とした線形解析による結果よりもより正確な解を得ることができる。しかし、状況によってはその解析結果が微小変形解析結果に比べ実用上大きな意味を持つとは限らないことも多い。

さらに、大変形解析は繰り返し計算が必要であり、微小変形解析に比べて計算時間は長くなる。設計条件を正しくとらえて大変形解析を行わなければ、時間の浪費、設計経費の浪費にもつながることになる。すなわち、変形が明らかに少ない場合には微小変形問題として解くことがよいであろう。ただし、逆に変形がおきくなる可能性のある場合の強度計算を微小変形問題として扱くと破壊事故などにつながる恐れのある解を得ることがあることも頭に入れておくべきである。図 4(a),(b)を比較すれば図(b)のほうが赤色部分の多いことから理解できるであろう。