

## 第 47 話 簡単そうで簡単ではないトラスの問題

2009 年 11 月 5 日 作成

萩原芳彦

図 1 のように、同じ長さの 2 本の棒がそれぞれ一端を天井に回転支持で取り付けられ、他端は互いにピンで結合されている。結合点 C に垂直下向きの力  $P$  が作用しているとき、支点 A, B の反力や C 点のたわみはどのようなになるであろうか。

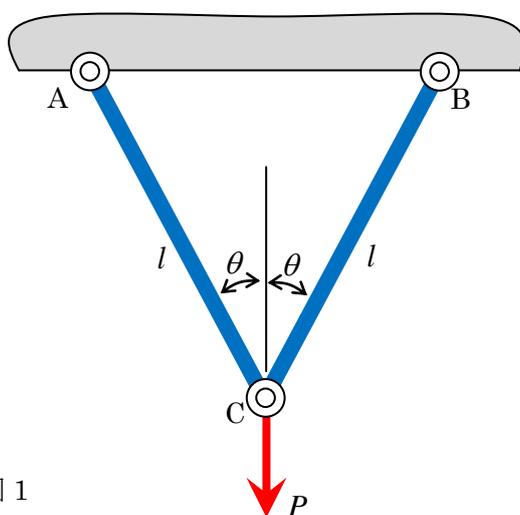


図 1

トラス構造も含み、複数部材からなる構造の問題を解くのは、教科書「よくわかる材料力学」2・4 節において説明した方法が一般的である。すなわち、全体構造を部材に分解し、部材間には作用・反作用の力（場合によっては作用・反作用の力のモーメントも）を仮定し、個々の部材におけるつり合い条件式をすべて求め、それらの連立方程式を解く方法である。

図 1 の場合も図 2 のように部材に分け、作用・反作用の力を仮定し、つり合い条件式を求めればよい。まず、C におけるピンにかかる力の水平方向、垂直方向のつり合い条件から、

$$R_{CA} \sin \theta - R_{CB} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$R_{CA} \cos \theta + R_{CB} \cos \theta - P = 0 \quad (2)$$

が得られる。これらの式から、

$$R_{CA} = R_{CB} = P / 2 \cos \theta \quad (3)$$

が求められる。

さらに、2 部材に対するそれぞれの力のつり合い条件から、

$$R_A - R_{CA} = 0 \text{ (棒 AC)}, R_B - R_{CB} = 0 \text{ (棒 BC)} \quad (4)$$

が求められる。なお、これらのつり合い条件式は図 2 に仮定した力の方向を考慮して求めている。以上の結果から、支点 A,B における反力  $R_A$ 、 $R_B$  も得られ、これらの水平、垂直成分を  $R_{Ax}$ 、 $R_{Ay}$ 、 $R_{Bx}$ 、 $R_{By}$  とすれば、

$$R_{Ax} = R_{Bx} = \frac{P}{2} \tan \theta \quad (5)$$

$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{P}{2} \quad (6)$$

となる。

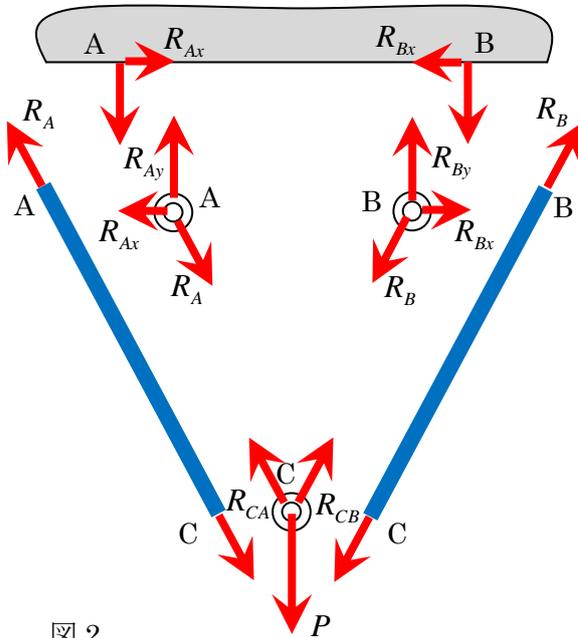


図 2

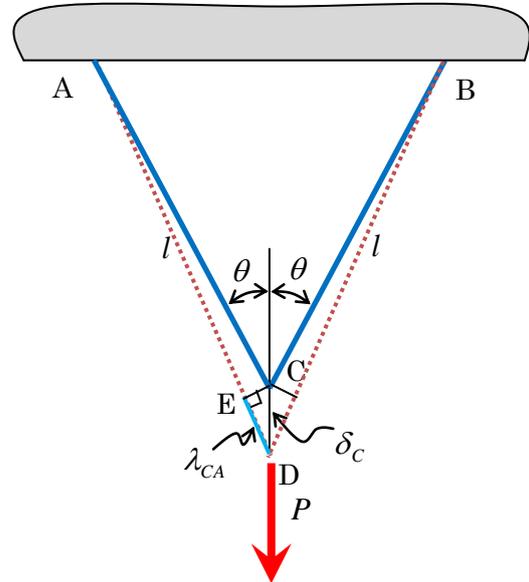


図 3

さらに、これら部材の断面積を  $A$ 、縦弾性係数を  $E$  とすれば、部材の伸び量は、

$$\lambda_{CA} = \lambda_{CB} = \frac{R_{CA} l}{EA} = \frac{Pl}{2EA \cos \theta} \quad (7)$$

となる。したがって、図 3 に点線で示すように部材 AC,BC は伸び、C 点は下方 D に  $\delta_C$  だけ移動することになる。部材の伸び  $\lambda_{CA}$  (DE) は微小であると考えれば、角度  $\theta$  の変化は少ないので、

$$\delta_C \cos \theta = \lambda_{CA} \quad (8)$$

なる関係が成り立つ。以上から、C 点のたわみ量  $\delta_C$  は、

$$\delta_C = \frac{Pl}{2EA \cos^2 \theta} \quad (9)$$

となる。

上記のトラス構造の場合には比較的簡単に解を得られるが、図 4 の場合はどうであろうか。図 4 では、図 1 の角度  $\theta$  が  $90^\circ$  となる場合である。式(3),(5)などに  $\theta = 90^\circ$  を代入すると値は無限大となってしまい、部材が破壊することになるが、現実には破壊することなくある量の荷重を支えることが可能であることは想像できるであろう。以下にこの場合の解法を解説しよう。

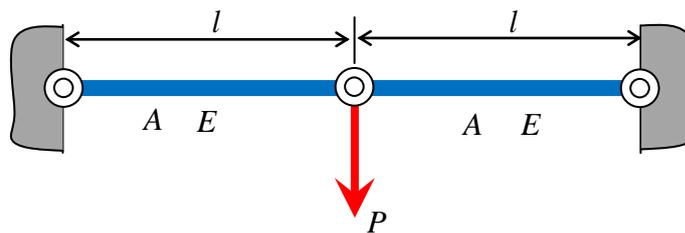


図 4

この場合には、図 5 のように力  $P$  が作用して部材がわずかに伸び、2 部材の結合点  $C$  が  $C'$  の位置に移動し、たわみ  $\delta$  が生じた状態を考える。なお、図 5 では伸びがかなりあるように見えるが、伸びは微小であることを前提に考えており、 $\angle CAC'$ 、 $\angle CBC'$  も微小角である。また、2 部材は同一形状、同一素材であるので、左右対称に変形し、部材  $AC$ 、 $BC$  ともに伸びは等しく、その量を  $\lambda$  とすれば、 $AC$ 、 $BC$  部材の長さはいずれも  $l + \lambda$  となる。

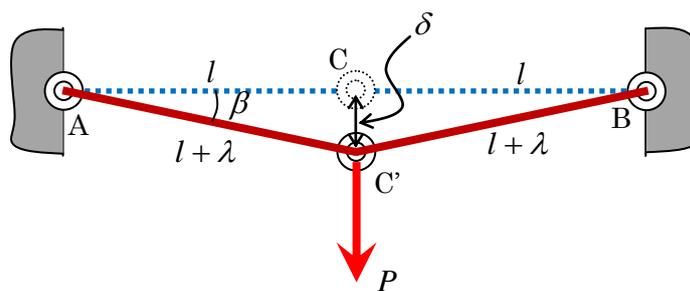


図 5

ここで、2 部材に生じている軸力を  $N$  とすれば、変形後の  $C'$  における垂直方向の力のつり合いから、式(2)のときと同じように考えて、

$$2N \sin \beta = P \quad (10)$$

が得られる。なお、 $\beta$  は  $\angle CAC'$  ( $= \angle CBC'$ ) である。また、棒の伸び  $\lambda$  は、

$$\lambda = \frac{Nl}{EA} \quad (11)$$

で表わされる。さらに、直角三角形 CAC'に着目すれば、

$$l^2 + \delta^2 = (l + \lambda)^2 \quad (12)$$

なる関係が得られる。ここで、式(10)、(12)は  $l \gg \lambda$  の場合にはそれぞれ、

$$N = \frac{Pl}{2\delta} \quad (13)$$

$$\delta^2 = 2l\lambda \quad (14)$$

となると考えてよく、式(11),(13),(14)から、

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{Pl^3}{EA}} \quad (15)$$

$$N = \frac{1}{2} \sqrt[3]{EAP^2} \quad (16)$$

が求められ、また部材に生ずる引張り応力  $\sigma$  は、

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{EP^2}{A^2}} \quad (17)$$

となる。

式(11)に示すように、フックの法則に従い部材の伸び  $\lambda$  は部材の軸力  $N$  に比例して変化するにもかかわらず、式(15)に示すように、式(9)とは異なり C 点のたわみ  $\delta$  は付加した力  $P$  に比例しては変化しないことが分かる。

また、式(9)では  $\theta$  が  $90^\circ$  に近付くと  $\delta_c$  は無限大となるが、式(15)で示すたわみ  $\delta$  は有限な値である。  $\delta_c = \delta$  としたときの角度  $\theta$  を求めると、

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{P}{EA}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{\sigma}{E}} \quad (18)$$

となり、応力や材質に依存することもわかる。現実の縦弾性係数や降伏応力を考慮すれば、このときの角度  $\theta$  は  $90$  度から数度以内のものとなり、このような角度状態のトラス解析には注意が必要であることがわかる。このように、複数の部材の組み合わせ角度が特定な場合には荷重と変位の間に比例関係が成り立たなくなることがある。そのような場合には第 32 話における **カスチリアノの定理** の適用にも問題が生ずる。その点については第 48 話で説明しよう。