

第 42 話 有限要素法、境界条件が正しくても

2009 年 7 月 2 日 作成

萩原芳彦

第 41 話において、支持条件（境界条件）の違いがはりに生ずる応力にどのように影響するかについて材料力学の理論に沿った形で話し、実際の場合の問題点も示した。最近では実際問題を有限要素法で解析することが多いので、前話の例を有限要素法で解析したらどのようなになるか、解析上の注意点などの話をしよう。

図 1 は解析モデルである。はりの断面は幅 $b = 30 \text{ mm}$ 、高さ $h = 50 \text{ mm}$ 、スパンは $l = 500 \text{ mm}$ である長方形断面の直線ばりであり、はりの全長に等分布荷重 $w = 60 \text{ N/mm}$ を作用させている。この形状は前話で取り上げた例と同じ両端支持ばりに等分布荷重が作用した場合であるが、このはりの左右端 A、B の支持条件や荷重負荷条件などの解析条件を変えて解析した結果を比較しよう。

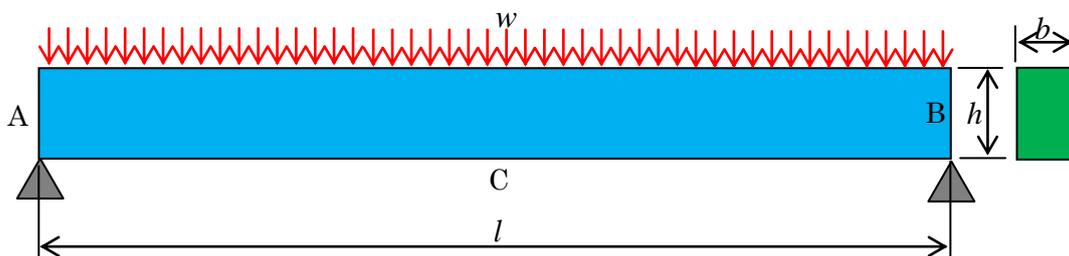


図 1

図 2 は図 1 の左右の支持条件を 2 通りにとって解析して得られた曲げ応力（はりの軸方向の垂直応力）の分布を示している。はりの変形状態は拡大せずに実倍率で示してある。図(a)は無負荷の状態であり、図(b),(c)が解析結果である。図(b)は左端 A を回転支持、右端 B を移動支持とした、いわゆる単純支持ばり（**静定ばり**）であり、図(c)は左右端いずれも回転支持であり、両支点にははりの変形に伴いはりの軸方向の反力も生ずる**不静定ばり**である。なお、解析時の支持位置は図 1 のようなはりの両端 A,B での下側位置ではなく、はりの高さ h の中点としてある。解析はごく一般的な有限要素法解析ソフトにある弾性解析によっており、フックの法則の成り立つ微小変形状態の下での解析である。言うまでもないことではあるが、大学、高専などの初等材料力学の教科書で扱っているはりの公式もこの条件のもとで成り立つものである。

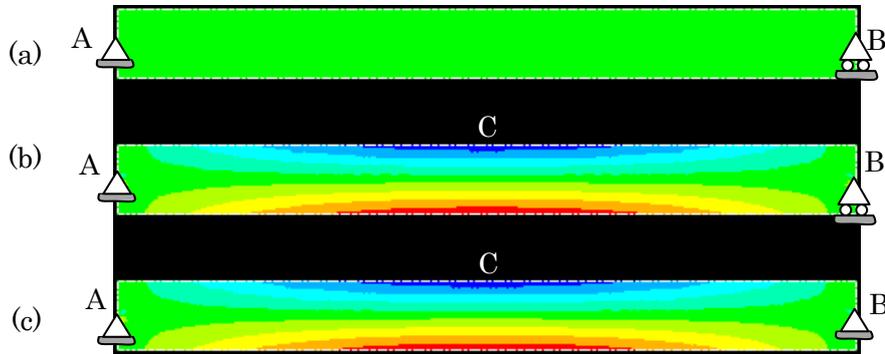


図 2 はりの曲げ応力分布

図 2 からわかるように、図(a)は無負荷時の状態であり、緑色は応力が零の状態を表している。図(b),(c)では曲げ応力（厳密に言えば軸方向の垂直応力）が生じ、上側は圧縮の曲げ応力、下側は引張りの曲げ応力となっている。青が濃くなるほど圧縮側に高く、赤が濃くなるほど引張り側に高い応力状態であり、緑色の個所は応力が零ないし零に近い値を表している。また、変形は実際の変形状態を表しており、この条件でははりはほとんどたわんでいないように見える。

図 2 からわかるように、支点 B が図(b)のように移動支持であっても、図(c)のように回転支持であっても応力分布に違いは見られない。すなわち、第 41 話で示したようなはりの軸方向力の影響は図(c)の場合に生じていない。なお、前話に示したように、単純支持ばりの公式から得られる、このときのはりの中央 C における最大曲げ応力は 150MPa、たわみは 0.758mm であり、上記の有限要素法解析でもほぼ同様な値が得られる。

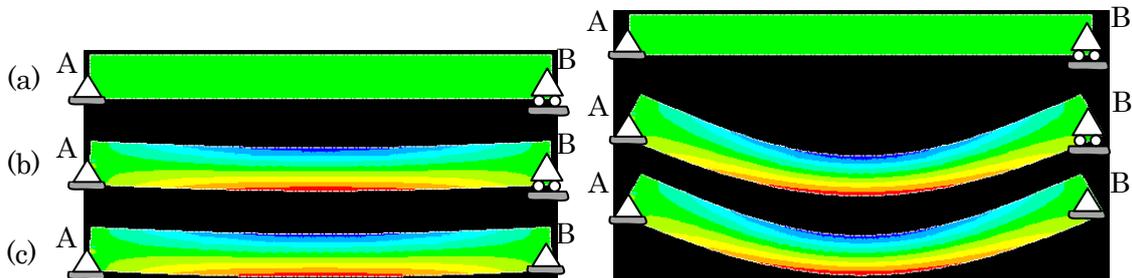


図 3

図 4

このはりに作用する等分布荷重を図 2 の場合の 10 倍、100 倍である $w = 600 \text{ N/mm}$ 、 $w = 6000 \text{ N/mm}$ だけ作用させた場合の解析結果が図 3, 4 である。このように大きな荷重

を作用させれば、曲げ応力もそれだけ大きくなり、実際の材料は塑性変形あるいは破壊をしてしまうであろうが、解析結果ではたわみが大きくなるだけである。また、図 3, 4 の図 (b) からわかるように、支点 B は移動支点であるにもかかわらずはりの曲げによって左に移動しておらず、回転支点でも移動支点でも同じ結果を示していることも明らかである。なお、応力の色分けは図 2 とは異なっており、図番が異なるものでは同じ色が同じ応力を表すわけではないが、いずれも緑色が応力零の状態に近いところを示している。

以上のような結果が得られるのは、一般に使われている弾性応力解析用の有限要素法解析ソフトでは微小変形が前提でプログラムが作られているからである。いくら荷重を大きく与えても単に荷重に比例して応力や変形量が大きく示されるだけであり、荷重負荷により変形が生じたことによる力の作用の仕方の変化などの影響は解析に反映されないのである。すなわち、図(c)の場合においても軸方向反力の影響は解析に反映されていないのである。そのため、上述のように大きな変形を伴う場合には、**境界条件が正しく設定されていても実際の問題を正しく解析したことはない**のである。

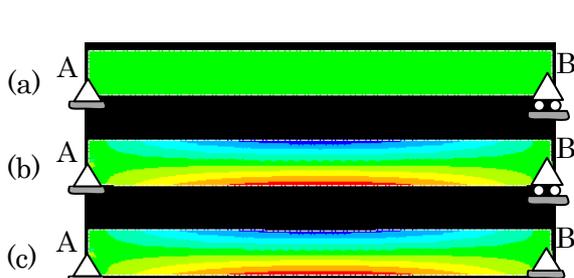


図 5

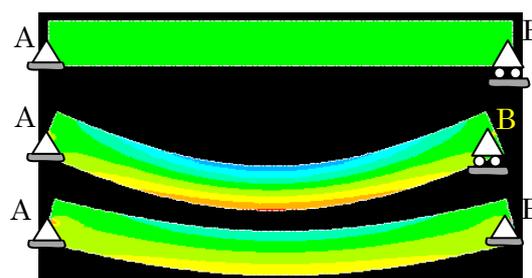


図 6

図 5, 6 は、図 2, 4 の例について大変形を考慮した有限要素法弾性解析を行ったものである。図 5 は $w = 60 \text{ N/mm}$ 、図 6 は $w = 6000 \text{ N/mm}$ の場合の結果である。図 5 の場合には荷重が小さく変形もほとんど生じないので、はりの両端の支持の違いは図からははっきりと見られないが、図 6 の場合には明らかに違いがわかる。図 6(b) のように支点 B が移動支持の場合には支点が左に移動し、最大のたわみも支点 B が移動しない図(c)に比べて大きくなる。また、色の変化から図(b)の方が図(c)に比べて最大応力が高くなっていること、図(c)の応力が零となる緑色の位置がはりの上表面側にやや移動していることなどが確認できる。

以上の結果は現実離れした大きな荷重負荷の例であるので、形状や荷重条件を変えて現実的な例に対して解析した結果を示したものが図 7 である。はりのスパンを第 41 話でも用いた図 5 の 10 倍の $l = 5000 \text{ mm}$ とし、等分布荷重を 100 分の 1 の $w = 0.6 \text{ N/mm}$ に下げ、図 7(a) の場合の最大の曲げ応力 σ_{\max} が上述のスパン $l = 500 \text{ mm}$ のときの図 2(b) の C にお

ける値と同じ 150MPa となるようにしてある。解析は図 5、6 と同じ、大変形条件を考慮した有限要素法による弾性応力解析である。

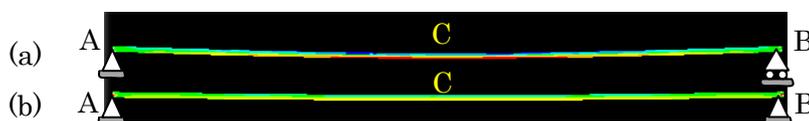


図 7

図 7 の(a)は左端が回転支持、右端が移動支持である単純支持ばり（静定ばり）、(b)は両端ともに回転支持の不静定ばりである。図ではややわかり難いが、図 6(b),(c)などと同様に、単純支持ばりの方がたわみは大きくなり、支点 B も若干左に移動し、応力も中央 C 部では赤色や青色が見られるように両端回転支持の場合よりも絶対値が高い応力状態を生じている。図 7(a)の場合のはり中央 C における上面、下面の曲げ応力（軸方向応力）はそれぞれ、 -150 MPa 、 150 MPa となり、単純支持ばりに等分布荷重が作用しているときのはりの公式から得られる曲げ応力と一致する。なお、図(a)の場合の中央 C における曲げモーメントは第 41 話の式(6)によれば 1875000 Nmm ($=1875\text{ Nm}$) となる。

一方、図 7(b)の場合にははりの中央 C における上面、下面の軸方向応力はそれぞれ、 -42 MPa 、 86 MPa となる。これは、図 8 に示すように、軸力 N によって $\sigma_0 = 22\text{ MPa}$ の引張りの応力が生じ、曲げモーメント M によって、はりの上表面には $\sigma_{\min} = -64\text{ MPa}$ の最小曲げ応力、下表面には $\sigma_{\max} = 64\text{ MPa}$ なる最大曲げ応力が生じていることによるものである。この結果、上表面には $\sigma_{\text{tot}} = -42\text{ MPa}$ なる圧縮の垂直応力が生じ、下表面には $\sigma_{\text{tot}} = 86\text{ MPa}$ なる引張りの垂直応力が生じることになり、図 8 に茶色の点線で示した垂直応力の分布がはりに生じている。

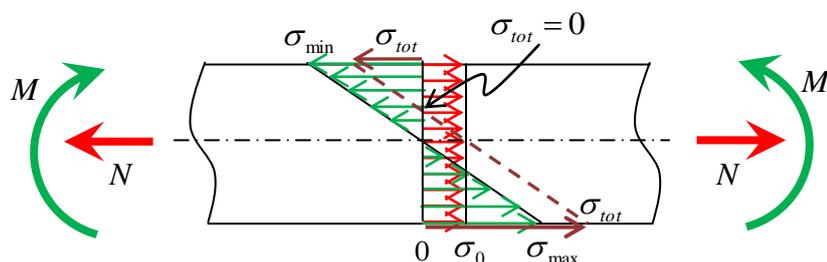


図 8

長方形断面であるこのはりの断面積 A 、断面係数 Z は、

$$A = bh = 30 \times 50 = 1500\text{ mm}^2、$$

$$Z = bh^2 / 6 = 30 \times 50^2 / 6 = 12500\text{ mm}^3$$

となるので、このとき生じている軸力 N およびはり中央 C における曲げモーメント M は、

$$N = \sigma_0 A = 33000 \text{ N} = 33 \text{ kN}$$

$$M_C = \sigma_{\max} Z = 64 \times 12500 = 800000 \text{ Nmm} = 800 \text{ Nm}$$

である。なお、図 7(a)の場合の中央 C における曲げモーメントは、1875Nm であり、これらの差は、有限要素法による解析によれば図 7(b)の C におけるたわみ δ_C が約 33mm であるので、軸力 N に対応する支点 A、B の水平反力 R_A 、 R_B によりもたらされる曲げモーメント分、 $M = \delta_C R_A (= \delta_C N)$ に相当することがわかる。

図 7(a)の場合には支点の軸方向力は零であり、軸力は生じないが、図 7(b)の場合には上述の約 33kN の軸力が生じており、これに対応した支点の反力がはりの軸方向に生じている。したがって、**支点は軸方向にずれないようにしっかりした構造でなければならない**ことになる。例えば、支点ではりを軸方向に支えるピンの太さは十分な大きさにする必要がある。はりの最大応力は図 7(a)の場合の 150MPa に対して図 7(b)では 86MPa と低く抑えられるので**支点以外の部分では低い応力状態に保たれ**、はり自体は強度的にはより安全である。しかし、支点のピンが壊れるなどして軸方向力を支えられなくなると両端ではりを垂直に支えていたとしても単純支持ばりの状態になるので最大応力は倍近い 150MPa に跳ね上がることになり、はりが破壊することも起こりうるのである。

以上のように、対象物の変形が解析結果に影響する場合には**大変形問題解析のソフト**を用いることが必要であり、通常使われる微小変形問題としての有限要素法解析ソフトでは**たとえ境界条件を正しく設定していても誤った結果を導くことがある**のである。なお、大変形解析は繰り返し計算を伴うので、微小変形問題に比べて解析時間は長くなることになる。最近の市販のソフトでは大変形解析も行えるので、状況に応じて相応しい解析手段を選ぶことが必要である。