

## 第 35 話 仮想仕事の原理を知っていますか

2009 年 1 月 22 日 作成

萩原芳彦

第 31 話以降、弾性ひずみエネルギーに関連した初等材料力学の問題解法の話をしてきたが、物体に作用する力の効果の一つである仕事と仕事をする能力であるエネルギーなどを用いて行う力学問題解法の基本とも言われるものが**仮想仕事の原理**である。ここではその基本的な扱い方を話そう。

仮想仕事の原理とは、**‘力を受けてつり合い状態にある物体を仮想変位させた時、物体に働く全外力がなした仕事の総和は零となる’**である。物体に作用する力がつり合っているということは力の総和が零であることであり、零の力のなす仕事は零なのだから上記の原理は当たり前のことと言ってしまうまでもあるが、この考えを使うことで問題が容易に解けるのである。

弊著「よくわかる工業力学」、p.74 以降においてもその基本原理の解説やいくつかの機構や構造問題の解法を示しているが、ここでは、簡単な例題を用いてその活用法を説明しよう。

図 1 のように、部材 AB、BC、CD、EF を互いにピンで結合した構造（**トラス構造**）の C 点に水平な力  $P$  が作用している。この場合の斜め部材 EF に生ずる軸力を仮想仕事の原理を用いて求めてみよう。なお、この例では AB、BC、CD 部材は同一寸法であり、長さを  $l$  とし、E、F はそれぞれ AB、BC 部材の midpoint 位置にあり、AB、CD は床と垂直になっている。したがって、 $\angle BEF$  は  $45$  度となる。

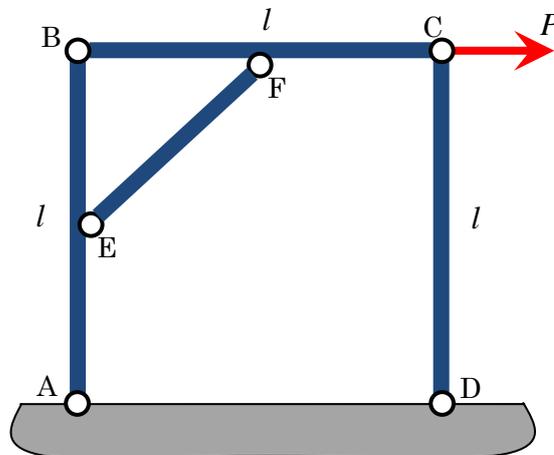


図 1

EF 部材には外力は作用しておらず、両端はピン結合であるので、EF 部材にはその軸方向の力しか働かない（その理由は「よくわかる材料力学」、34 ページ、あるいは「よくわかる工業力学」、36 ページを参照のこと）。そこで、生ずる軸力を  $N$  と仮定し、図 1 の状態を描き直せば図 2 のようになる。図 2 は EF 部材を取り除いたため、部材が剛体であっても動きのできる **リンク機構**（「よくわかる工業力学」、34 ページ参照）となるが、力学的には図 1 と同じ問題であり、力のつり合いはとれ、図 1 と同様に静止している。

ここで、仮想仕事の原理を用いるため、図 2 の状態から仮想変位をさせた状態を示したものが図 3 の緑色で示したものである。AB、CD 部材はそれぞれ A、D を中心にして微小角  $\delta\theta$  だけ回転し、BC 部材もそれに応じて移動している。また、図では移動後の力の作用位置を示していないが、作用している力  $P$ 、 $N$  の作用点も移動する。

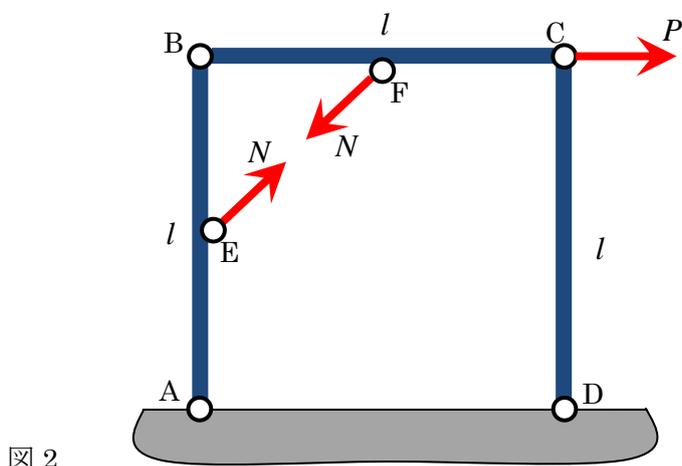


図 2

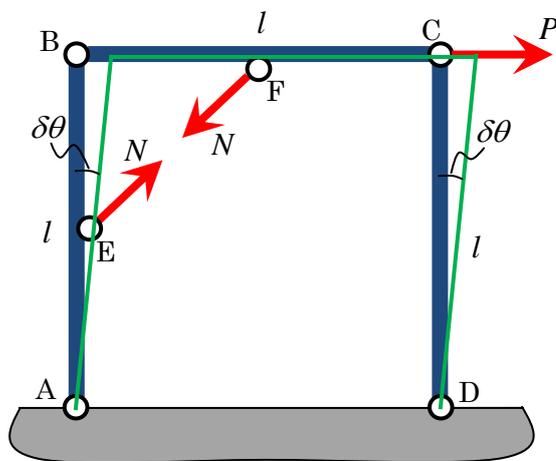


図 3

このとき、力の作用点の仮想移動に伴い、作用している力は仮想仕事をする。仕事量は力と力の作用線方向の移動距離の積であるから、この場合には以下ようになる。

C 点の力  $P$  のなす仕事：力  $P$  と水平移動距離の積

$$P \cdot l \delta \theta \quad (1)$$

E 点に作用する力  $N$  のなす仕事：力  $N$  の水平成分と水平移動距離の積

$$\frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{2} \delta \theta \quad (2)$$

F 点に作用する力  $N$  のなす仕事：力  $N$  の水平成分と水平移動距離の積

$$-\frac{N}{\sqrt{2}} \cdot l \delta \theta \quad (3)$$

なお、E、F に作用する力  $N$  は垂直方向には移動しないので力  $N$  の垂直成分は仕事をしない。

**仮想仕事の原理**によれば、これらの仕事の総和が零であるので、

$$Pl \delta \theta + \frac{Nl}{2\sqrt{2}} \delta \theta - \frac{N}{\sqrt{2}} l \delta \theta = 0 \quad (4)$$

が成り立つ。したがって、EF 部材に生ずる軸力  $N$  は以下ようになる。

$$N = 2\sqrt{2}P \quad (5)$$

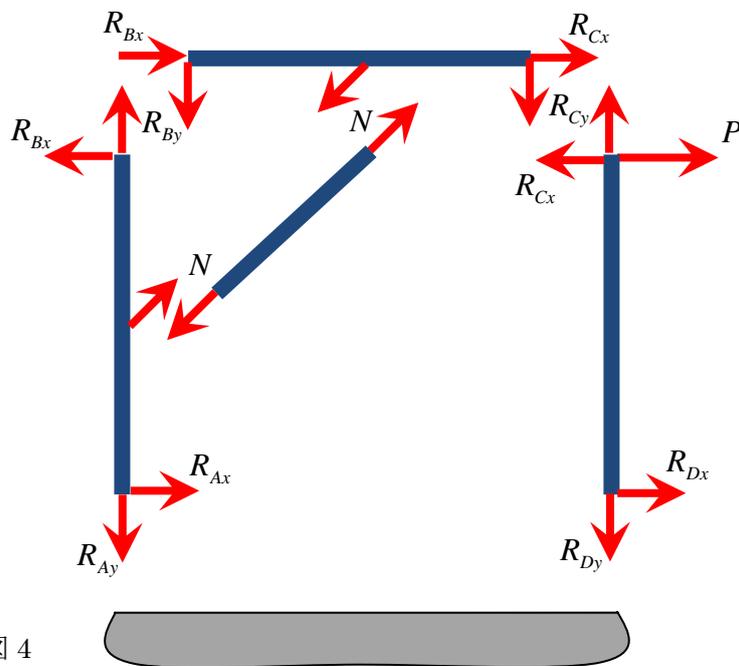


図 4

図 1 の問題において EF 部材に生ずる軸力  $N$  を物体に作用する力や力のモーメントのつり合い条件式から求めようとする、図 4 のように節点 A、B、C、D、E、F における  $N$  を含めて 9 個の未知力を仮定し、末尾の補足に示したような、AB、BC、CD 部材における 9 個の水平方向、垂直方向の力のつり合い条件式、力のモーメントのつり合い条件式を求め、解を得なければならない。これに比べれば、特定の場所の力を求める場合には仮想仕事の原理による方が簡単であることがわかる。

質点や剛体問題における仮想仕事の原理による解法の様々な例を、弊著「よくわかる工業力学」、「機械力学の基礎と演習」において扱っている。参考にされるとよいであろう。

上記の例では部材は剛体であるとしたが、実際の物体は変形する。例えば弾性変形する場合には外力の作用により部材には弾性ひずみエネルギーが蓄えられる。そのような場合には、仮想変位による仕事としては、外力による仕事の他に、内力による仕事も考えなければならない。すなわち、**変形する物体の場合の仮想仕事の原理は、「仮想変位によって全外力ならびに全内力のなす仕事の総和が零である」**となる。なお、外力には集中力、分布力といった物体表面に作用する表面力の他に重力のような物体力（よくわかる材料力学、27 ページ参照）も含まれる。

以上のように、仮想仕事の原理は材料力学の問題を解くときに有効な解析手段であり、複雑な形状の物体の応力、ひずみの解析に現在では欠くことのできない**有限要素法**解析ソフトのプログラムの基本にも組み込まれている。その内容は有限要素法に関する専門書（「有限要素法入門」三好俊郎著（培風館）など）を参考にされるとよいであろう。有限要素法ソフトを使うために必要な、ほんのさわり程度のことであれば、弊著「よくわかる破壊力学」、46 ページにおいても解説している。

#### 補 足：

図 4 のつり合い条件式は以下ようになり、これらの式から  $N = 2\sqrt{2}P$  が求められ、その他の反力もわかる。

AB 部材のつり合い条件式

$$R_{Ax} - R_{Bx} + N \cos 45^\circ = 0 \quad (6)$$

$$-R_{Ay} + R_{By} + N \sin 45^\circ = 0 \quad (7)$$

$$R_{Bx} \frac{l}{2} + R_{Ax} \frac{l}{2} = 0 \quad (8)$$

BC 部材のつり合い条件式

$$R_{Bx} - N \cos 45^\circ + R_{Cx} = 0 \quad (9)$$

$$-R_{By} - N \sin 45^\circ - R_{Cy} = 0 \quad (10)$$

$$R_{By} \frac{l}{2} - R_{Cy} \frac{l}{2} = 0 \quad (11)$$

CD 部材のつり合い条件式

$$P + R_{Dx} - R_{Cx} = 0 \quad (12)$$

$$R_{Cy} - R_{Dy} = 0 \quad (13)$$

$$R_{Cx}l - Pl = 0 \quad (14)$$