

第 31 話 ひずみエネルギーの重ね合わせには注意

2008 年 11 月 20 日 作成

萩原芳彦

フックの法則の成り立つ弾性問題では重ね合わせの原理が成り立つが、その取扱いには注意が必要であることを第 30 話で述べた。ここではひずみエネルギーの重ね合わせは慎重に考えなければならないことを話そう。

図 1 (a),(b)は、いずれも断面積が A 、長さ l 、縦弾性係数 E である同一の棒に引張り力 P_1 あるいは P_2 を作用させた状態である。

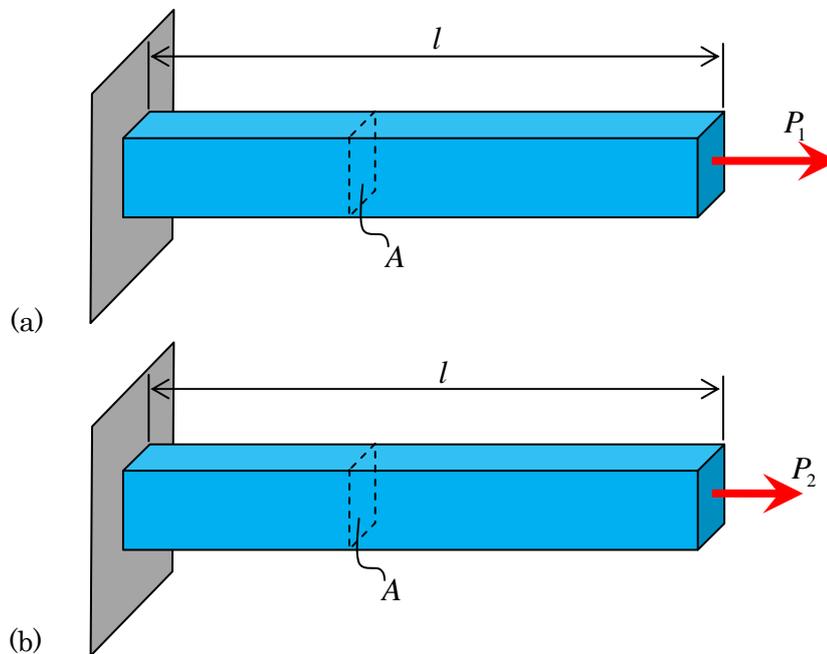


図 1

図 1 (a),(b)の棒に蓄えられる弾性ひずみエネルギー U_1 、 U_2 は、それぞれ、

$$U_1 = \frac{P_1^2 l}{2EA} \quad (1)$$

$$U_2 = \frac{P_2^2 l}{2EA} \quad (2)$$

となる（「よくわかる材料力学」式 (9・3)）。

では、図 2 のように、同じ棒に引張り力 P_1 と P_2 を同時に作用させた場合の弾性ひずみエネルギー U はどうなるであろうか。

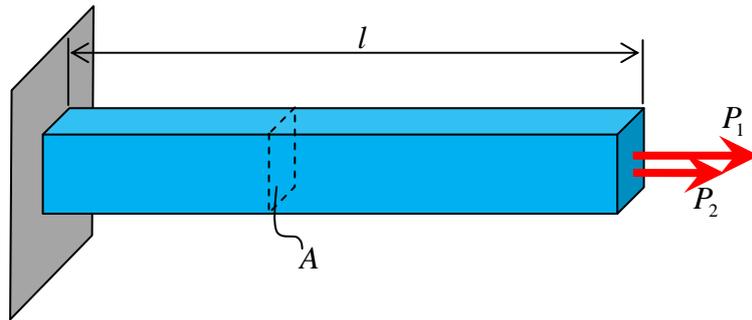


図 2

この場合の弾性ひずみエネルギーは P_1 あるいは P_2 を単独で作用させた場合の弾性ひずみエネルギー U_1 と U_2 の和にはならないのである。第 30 話において重ね合わせの原理により、同一種類の応力は単純に足し合わせればよいことを示したが、それらの応力によってもたらされている弾性ひずみエネルギーは足し合わせによって求めることはできない。

同時に P_1 と P_2 が作用した場合の弾性ひずみエネルギー U は、

$$U = \frac{(P_1 + P_2)^2 l}{2EA} = \frac{P_1^2 l}{2EA} + \frac{P_1 P_2 l}{EA} + \frac{P_2^2 l}{2EA} \quad (3)$$

となる。すなわち、単独で作用している場合のひずみエネルギーの和の値よりも、 $P_1 P_2 l / EA$ だけ増加するのである。式(3)のように、原理に忠実に式を用いれば正しい結果にたどり着くが、単に重ね合わせという言葉だけを鵜呑みにしてしまうと、間違った結果を導くことになる。

この違いは、図 2 において、はじめに P_1 を加えた状態でさらに P_2 を作用させると、初めに加えてある力 P_1 の作用点も一緒に移動し、仕事をするところから理解できるであろう。教科書図 9・1(b)上でこの現象を描いてみることで、上記の差を定量的に確かめることができるであろう。

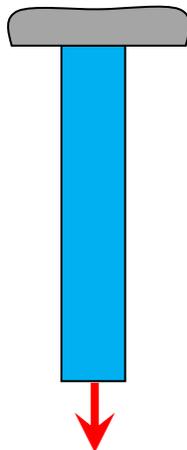


図 3

特に、図 3 のように、棒を吊るし、下端に力を加えて引っ張った場合、この力によるひずみエネルギーと棒の自重によるひずみエネルギーを別々に求め、足し合わせるような間違いを起こす学生は多い。

なお、第 30 話で説明したように、棒に引張圧縮や曲げあるいはねじりをもたらす外力等が同時に作用した場合には単純に応力の足し合わせはできないことを説明した。しかしながら、棒に引張りや曲げあるいはねじりという異なる作用をもたらす力やモーメントが同時に負荷されている場合の弾性ひずみエネルギーは、これらが単独で作用している場合の弾性ひずみエネルギーの和となることも覚えておくとよいであろう。**作用する力あるいは力のモーメントの作用による物体の変形時に、他の力や力のモーメントの作用点が移動し、仕事をするか否かが、足し合わせができるか否かの分かれ目となるのである。**以上に関しては教科書 147 ページ図 9・6 などを参考にしてもらいたい。