

## 第 30 話 重ね合わせの原理 注意点

2008 年 11 月 6 日 作成

萩原芳彦

第 29 話において重ね合わせの原理が材料力学の問題を解く場合に便利であることを話した。しかし、注意すべき点はいくつかある。その例を以下に紹介しよう。

図 1(a)のように、丸棒が左端 B を固定され、右端 A には外力  $P$  ならびにトルク  $T$  を受けている。このように**曲げとねじりの組み合わせ状態**にある、直径  $d$  の丸棒の自由端から  $c$  の位置 C における応力状態を考えてみよう。

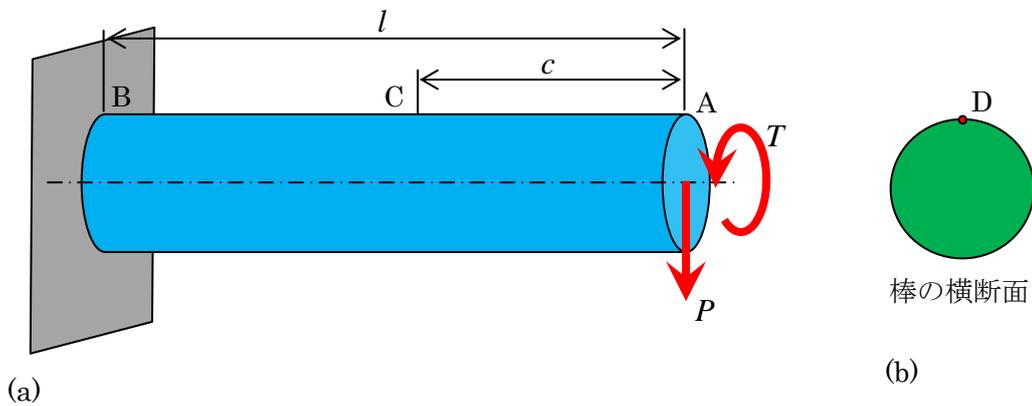


図 1

外力  $P$  だけがこの丸棒に作用している場合には、棒は曲げられるだけであり、C における曲げモーメント  $M_C$  が、

$$M_C = -Pc \quad (1)$$

であるので、この断面での最大曲げ応力  $\sigma_{C\max}$  は、はりの上面 D (図 1(b)) において生じ、

$$\sigma_{C\max} = \frac{M_C}{Z} = \frac{32Pc}{\pi d^3} \quad (2)$$

となる (教科書式 (4・13))。

一方、トルク  $T$  だけがこの丸棒に作用している場合には、棒はねじられ、C 断面におけるねじり応力の最大値  $\tau_{C\max}$  は、C における丸棒表面全体で一様になり、その値は、

$$\tau_{C\max} = \frac{T}{Z_p} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (3)$$

となる (教科書式 (7・15))。

外力  $P$  とトルク  $T$  が同時に作用している場合には、重ね合わせの原理からこれらを足し合わせればよい。しかしながら、一方は垂直応力の一種である曲げ応力であり、ねじりの場合には性質の異なるせん断応力である。当然のこと、応力はベクトルの一種であり、異なる種類あるいは方向に存在する応力を単純に足し合わせることはできない。

すなわち、図 1 の例では、自由端から  $c$  の位置での棒の表面 D 点において、図 2 に示す様な応力状態となっている。この棒の強度計算に必要なこの場所における垂直応力やせん断応力の最大値は  $\sigma_{Cmax}$ 、 $\tau_{Cmax}$  ではなく、2次元状態にある場所における応力の算出方法、すなわち組み合わせ応力状態における応力計算の知識（「よくわかる材料力学」第 8 章）が必要である。このようなことは棒の引張圧縮とねじりの組み合わせの場合にも生ずる。

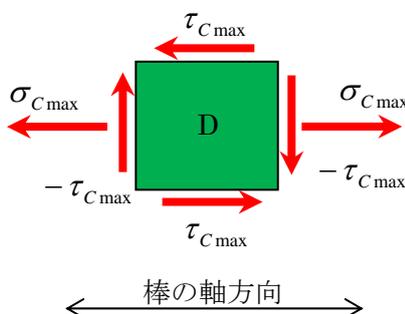


図 2

なお、上述のように、このような問題でも個々の力が単独で作用している場合の解析結果が役立つわけではなく、個々に得られた結果を利用して設計等で必要な最大応力などを求めるのであり、重ね合わせの原理は十分活用できている。ただし、最大応力は単純な足し算では求められないということに注意する必要があるのである。

また、図 1 の棒に作用する外力が図 3 のように棒に対して引張りならびに曲げ作用を及ぼす組み合わせの場合はせん断応力成分が横断面上にはなく、最大応力の計算は簡単である。

この場合には、外力  $P_2$  による最大曲げ応力は図 1 の場合とおなじ D において生じ、

$$\sigma_{Cmax} = \frac{M_c}{Z} = \frac{32P_2c}{\pi d^3} \quad (4)$$

となる。また、外力  $P_1$  による引張り応力  $\sigma_{c0}$  は断面上で一様となり、

$$\sigma_{c0} = \frac{P_1}{A} = \frac{4P_1}{\pi d^2} \quad (5)$$

となる。ここで、 $A$  は棒の横断面積である。

したがって、この場合の D における応力状態は図 4 のようになり、設計計算で必要にな

る最大の垂直応力は、単に  $\sigma_{C0}$  と  $\sigma_{Cmax}$  の和を求めることによって得られる。これは、はりの曲げ応力の式を導出した際に、はりを細い繊維の束からなると仮定（「よくわかる材料力学」4・1節）して導いたことなどからも理解できるであろう。

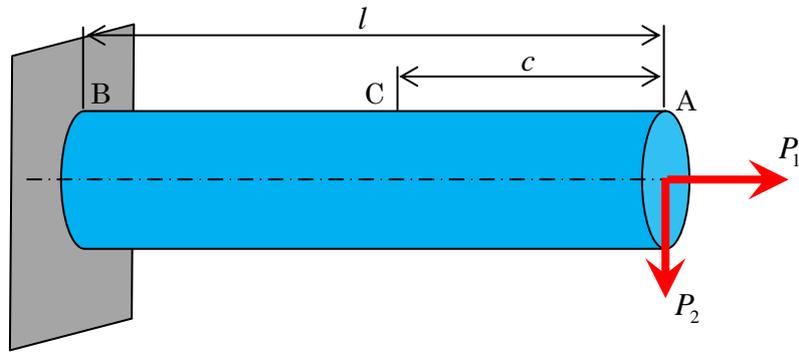


図 3

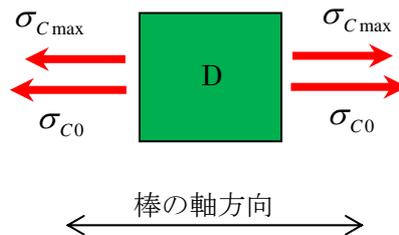


図 4

なお、重ね合わせの原理は、フックの法則が成立つ線形現象である場合に適用でき、非線形現象の場合には適用できない。図 5 のように力と変位が曲線的に変化する非線形の図を描いてみれば理解できるであろう。  $P_1$ 、 $P_2$  がそれぞれ単独で作用したときの伸びが  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  であるとき、 $P_1$ 、 $P_2$  が同時に作用したときの伸び  $\lambda$  は図を見てもわかるように、 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  の和に等しくはならない。

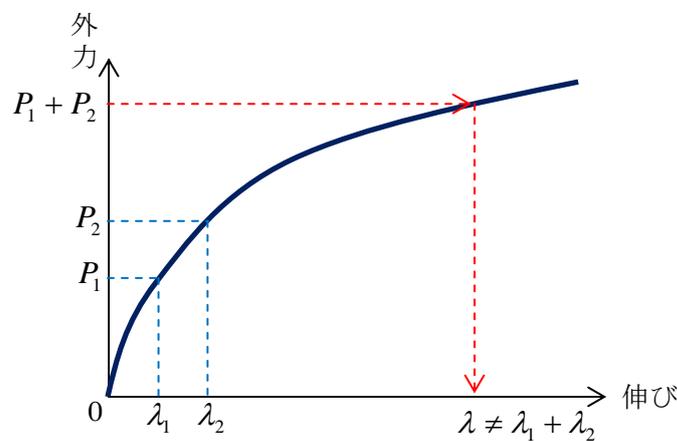


図 5