

第17話 力のモーメントと曲げモーメントを混同していませんか

2008年4月10日 作成

萩原芳彦

はりの曲げや軸のねじりにおいて登場する曲げモーメントやねじりモーメントについて、なかなか正しく理解できない学生がおり、教える側としても苦労するところである。これもニュートンの第1法則や第3法則の本質をおろそかにして、素通りするところと関係していないだろうか。第16話の続きの内容となるが、注意点をまとめてみよう。

モーメントという用語は力学関係では、力のモーメント、慣性モーメント、断面2次モーメント、面積モーメントなど、様々な用語と組み合わせて使われている。このことから、モーメントは力に直接関係するだけの用語ではないことをまず認識する必要がある。

力とは‘**物体に作用して物体の運動状態や形を変える原因となる働き**’のことであり、モーメント (Moment) とは辞書によれば能率、あるいは能力の意味があるので、**力のモーメントとは物体の運動状態や形を変える原因となる働きである力の何らかの能力を表す量**ということになる。

物体は、物理の授業などにおいて仮定する質点のように、大きさが無いものではなく、現実の場合には必ず大きさを持っている。大きさを有する物体の運動 (移動) は、第12話などにおいても説明したように、一般に**並進運動**と**回転運動**の組み合わせによって表現することができる (「よくわかる工業力学」 p.94)。

並進運動においては、力の作用によって物体内のどの点も同じ動きをする。このような場合、物体は大きさのない質点の運動と同じように力 F そのものにより表わされる運動と考えるとよく、 $F = ma$ (m は質量、 a は加速度) を並進運動する物体の運動方程式としてよい。

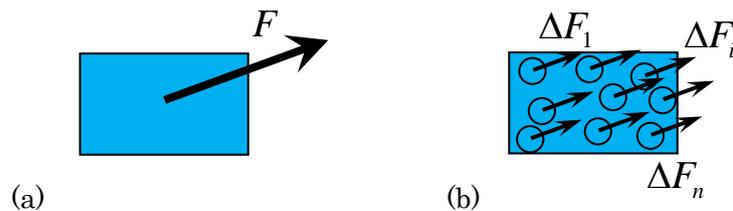


図1

このことは、図 1(a)のような力 F を受けて並進運動する物体の運動を、この力と等価となる無数の平行な微小力 ΔF_i ($F = \sum \Delta F_i$) に分け、物体中の無数の質点 Δm_i ($m = \sum \Delta m_i$) に作用させている図 1(b)の状態と同じと考えれば理解できるであろう。

一方、物体が回転運動する場合には物体内の各点は異なる動きをする。そのような運動を引き起こす力の場合、力の大きさや方向だけではなく、その作用位置も影響する。このような回転運動の運動方程式は、 $T = I\alpha$ (I は慣性モーメント、 α は角加速度) となる(「よくわかる工業力学」など参照)。ここに力のモーメント T が登場する。なお、力のモーメントとは‘物体を回転させようとする力の働き’であると定義されている。このように、並進運動における力の働きが力そのものによりもたらされるのに対し、回転運動における力の働きは力のモーメントの形で物体にもたらされる。

図 2a を用いて、物体を回転させようとする力の働きである力のモーメントについて説明すれば、以下のようになる。物体に作用する力が A 点において図の矢印の方向にあるとし、物体の回転が O を通り紙面に垂直な軸の周りで生ずるものとするれば、O から力の作用線へおろした垂線の長さ r と力 P の積、 $T = rP$ が物体を O の周りで回転させようとするこの力 P の働きであり、力のモーメントの大きさはこのようにして求められる。その正負は、一般に回転軸に関して反時計回転に回転させる場合を正と約束している。この場合は、A に作用した図の向きの力 P により O の周りで、物体は赤色の回転矢印で示した回転方向、すなわち反時計方向に回転することになり、このような場合を正の力のモーメントと約束する。

力が同じ場所に作用していても、例えば図 2b のように B 点を中心にして回転させる場合には、時計回転に回転することになり、負の力のモーメントとなる。このように、作用する力 P 並びにその作用点と同じであっても、物体を回転させようとする力の働きである力のモーメントは、その大きさも符号も $T' = -r'P$ の様に異なってしまう。

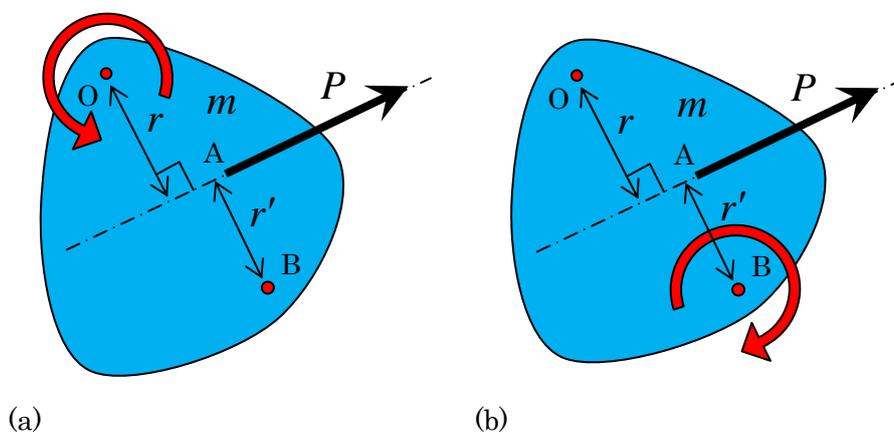


図 2

以上の説明からわかるように、物体の運動において考える力のモーメントは、**回転方向によって正負の定義ができる**。このことは、第 16 話において外力の正負は座標軸との関係で定義できるとしたことと同じ状況にあるということである。これに対して、材料力学において、はりの曲げ応力やたわみなどの計算の中に登場する**曲げモーメント**は、上記の力のモーメントとはやや違う意味を持つものである。第 16 話において外力と内力の違い、作用・反作用の力の関係などを理解できた読者はその違いをある程度想像することができるであろう。なお、このことは棒をねじる場合に登場する**ねじりモーメント**についても同じである。

結論を先に言えば、力のモーメントは外力に対応し、曲げモーメントは内力に対応するものであることである。平易にその違いを述べれば、力のモーメントは**物体に作用するすべての力を対象**に考え、それによる物体の回転運動を明らかにするのに対し、曲げモーメントは物体に作用する力の内の**断面の片側だけに作用する力を対象**に考え、それによる物体の曲げ応力や曲げひずみを明らかにするものである。

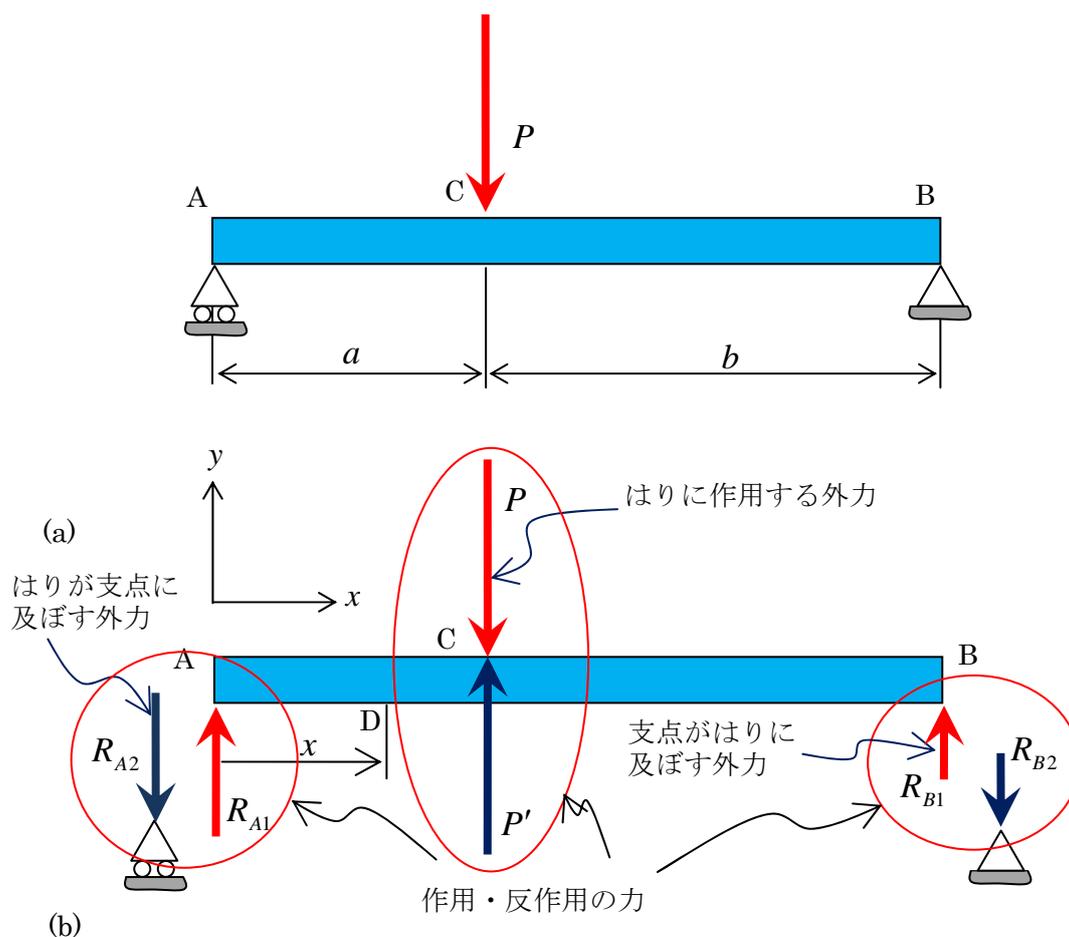


図 3

以下に単純支持ばりに集中力 P が作用している図 3a を例に、その違いを説明しよう。図 3b は図 3a を第 16 話において行ったこと同様に、支点とはりに分解して示したものである。図 3b において赤色の矢印ははりに作用している外力であり、青色で示した矢印はこれらに抗してはりが外部に及ぼしている外力である。赤枠で囲まれた一対の矢印の力は作用・反作用の力であり、はり、支点、床を含めた全体を一つの物体とすれば、第 16 話と同様にこれらの一対の力は内力とみなすことができる。

この場合、はりに関するつり合い条件は

$$R_{A1} + R_{B1} - P = 0 \quad (1)$$

力のつり合い条件（並進移動しないための条件）

$$R_{A1}(a+b) - Pb = 0 \quad (2)$$

力のモーメントのつり合い条件（回転移動しないための条件）

となるので、 R_{A1} 、 R_{B1} が求められ、作用・反作用の関係から R_{A2} 、 R_{B2} も求められ、以下のようなになる。

$$R_{A1} = -R_{A2} = \frac{b}{a+b}P \quad R_{B1} = -R_{B2} = \frac{a}{a+b}P \quad (3)$$

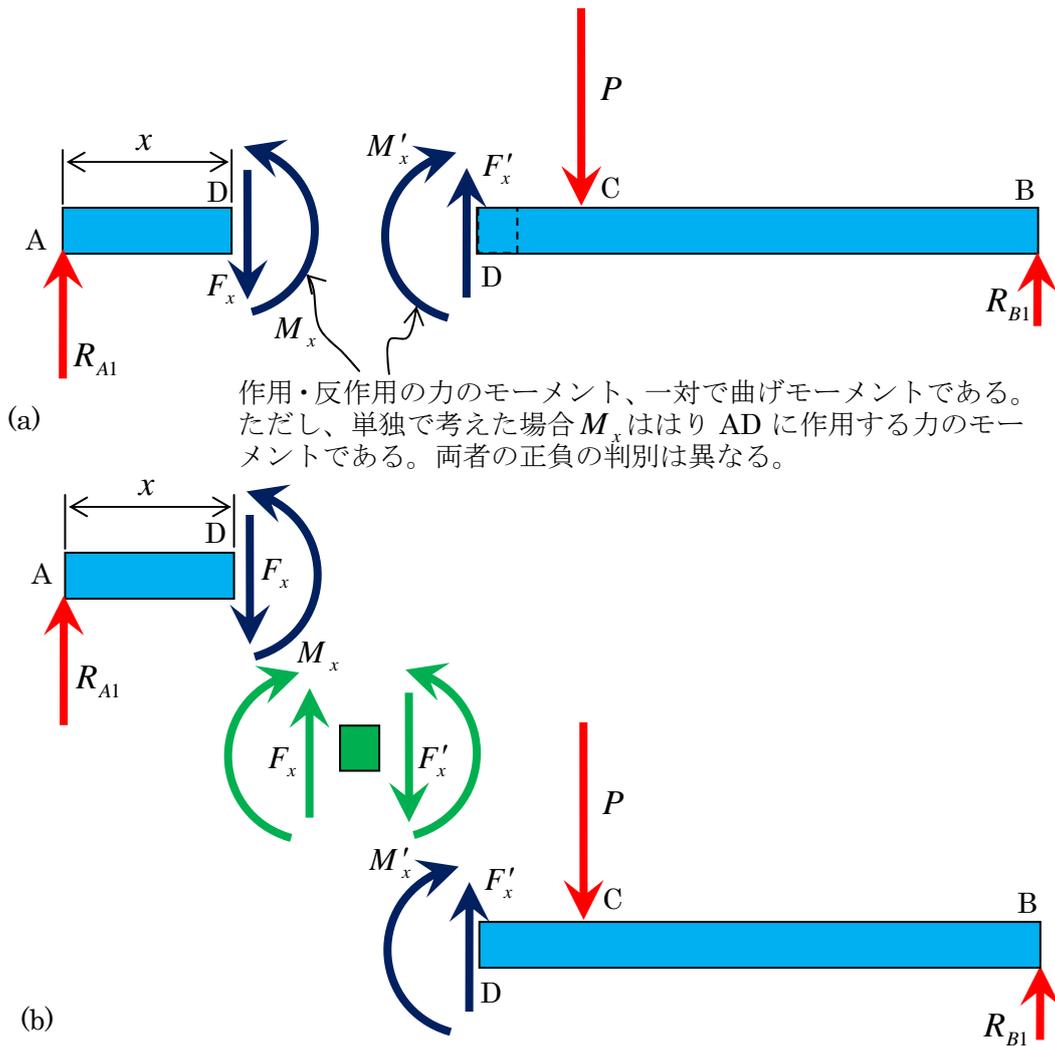
はりに作用している外力は P 、 R_{A1} 、 R_{B1} となるが、ここで、はりの左端 A から x のところ D におけるこれらの外力による力のモーメント M_D を求めると、

$$M_D = -R_{A1}x - P(a-x) + R_{B1}(a+b-x) \quad (4)$$

となる。式(4)に式(3)を代入して整理すれば $M_D = 0$ となることはすぐにわかる。

すなわち、つり合い状態にある物体に作用している力のモーメントの総和はどこで考えても零となるのである。このことが納得できず、力のモーメントのつり合い条件式をあらこちらで求めて式の数を増やし、問題を解こうとする学生が多いが、それは間違いである。力のつり合い条件式の代わりとして用いる場合もあるが、**平面上であれば力のモーメントのつり合い条件式は基本的には一つ**なのである。

はりの曲げを考えると、上述の M_D のようにして求めた式を用いて曲げ応力の数値計算をする学生はさすがに少ないが、文字式の過程ではこのような過ちを犯す学生はしばしば見かける。そこで、第 16 話と同じように、はりを分割した図 4 を用いて**曲げモーメントとは何か**を説明しよう。図 4(a)は図 3(b)のはりを右端 A から x のところで 2 分割して示したものである。赤色で示した矢印ははりに作用している外力であり、はり全体はこれらの力によってつり合い状態にあり、静止している。分割した部分も当然それぞれ静止していることになるが、赤色の外力だけではつり合いをとれず、動いてしまうことも明らかである。



作用・反作用の力のモーメント、一対で曲げモーメントである。ただし、単独で考えた場合 M_x ははり AD に作用する力のモーメントである。両者の正負の判別は異なる。

図 4

例えば、左側の部分 AD は R_{A1} だけでは上の方へ動いてしまう。このため、静止させるには R_{A1} とつり合う力が必要であり、それが D において DB 部分から作用している F_x である。 F_x と R_{A1} は、つり合いの関係にならなければならないが、 $R_{A1} + F_x = 0$ の関係が成り立つ。ここで、 F_x と R_{A1} は、方向は同じであるが、向きが逆の力となり、かつ作用線も異なるので、偶力である。

これらの力によって AD 部分には $R_{A1}x$ なる力のモーメントが生じ、このままではどこか遠くに移動することはないものの、この場所で時計方向に回転することになる。静止させるには、 $M_x = R_{A1}x$ なる反時計回転の力のモーメントが DB 側から加えられていなければならない。右側のはり DB は、これらの力 F_x や力のモーメント M_x の反作用の力 F'_x や反作用の力のモーメント M'_x を受ける。

このように、はりの断面には作用・反作用の力や力のモーメントが生じている。なお、 F_x や M_x は考えている断面の片側に作用している力だけで決まっており、両側の力を組み込んでいないことも確認できるであろう。

ここで示した一対の力 F_x 、 F'_x ははりの横断面に沿う形で生じているのでせん断力と呼び、第 16 話で説明した力 N_1 、 N_2 と同じく、内力である。また、 M_x 、 M'_x は内力モーメントの一種であり、この一対のものがはりの曲げ作用を起こすので、曲げモーメントと呼ばれる。曲げモーメントについてもう少し詳しく説明すれば以下のようなになる。

図 4b は D の近傍において、緑色で示した微小な部分を切り出し、力や力のモーメントを示したものである。内力モーメントとして存在する緑色で示した回転矢印のモーメントによってこの部分は下に凸に曲げられる。力のモーメントは微小部分の左右でわずかに異なることになるが、ここではそのことは無視して表示してある。詳しくは、「よくわかる材料力学」の図 3・7などを参照してもらいたい。

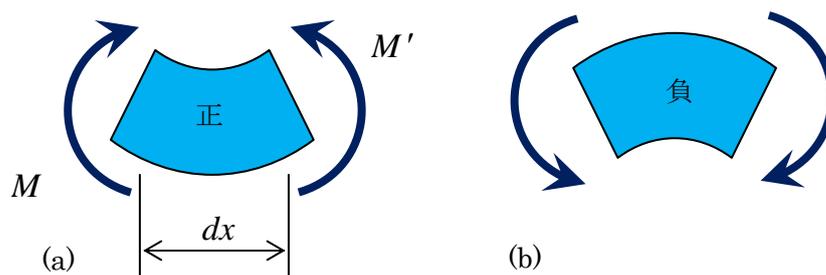


図 5

図の緑色の部分を取り出して拡大したものが図 5a である。また、外力の作用が異なれば図 5b の状況にもなる。いずれにしても曲げモーメントは内力モーメントの一種であり、曲げモーメントの大小ではりの曲げ応力やたわみは決まるのである。

第 16 話において説明したことと同じように、外力はここでも間接的に関与していることが分かるであろう。また、内力や内力モーメントに関与しているのはその場所の片側に作用している外力だけである。両側の外力を混同にしてはならない。力のモーメントの正負はそれによる回転が時計回転か反時計回転かで判断できるが、曲げモーメントの正負は結果として生ずる変形がどちら向きになるかで判断する。例えば、図 5a において、 M は負の力のモーメントであり、 M' は正の力のモーメントである。この状態における曲げモーメントは、はりを下向きに凸に変形させており、正の曲げモーメントである。図 5b の場合は M と M' の正負が逆転し、曲げモーメントは負となる。