

第7話 知らないと大変なことになる応力集中

2007年10月20日 作成

萩原芳彦

初等材料力学は主として棒の力学を扱っており、棒の断面積が急激に変化しない場所、力の作用点から離れた場所、拘束して（あるいは支えて）いるところから離れた場所における応力や変形は正確に求められる。しかしながら、例えば図1のように太さが途中で変化し、段となっている棒ABを力 P で引っ張った場合における段の部分Cの近傍あるいは集中力 P の作用点近傍の応力状態は複雑であり、初等材料力学の手法では求めることができない。

また、一般にはC近傍での最大応力は増加する。このような、形状が急激に変化する場所で現れる応力増加現象を応力集中と呼び、その高まり具合を表す量を**応力集中係数**と呼ぶ（よくわかる材料力学、式(1・32)）。機械、構造物を設計するとき、あるいは使用中の保守点検などにおいて、このような場所に高い応力が生ずることに対して十分注意を払わなければならない。

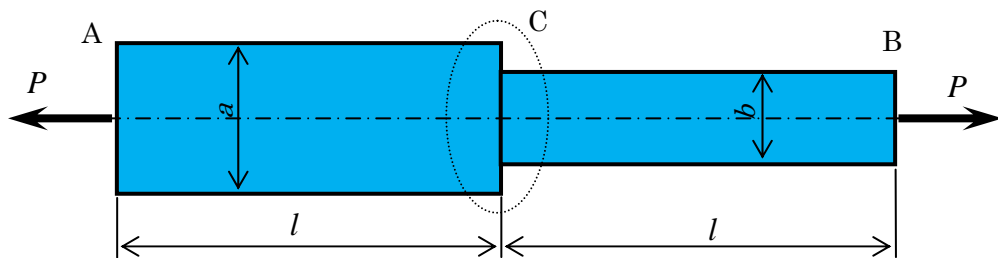


図1

第4話で応力集中という用語を示したので、ここでは応力集中についての初歩的な事柄を簡単な例題を用いて説明しよう。そこで、図1に示した段付き棒の形状、寸法ならびに作用力が図2に示す状態である場合について考えてみよう。

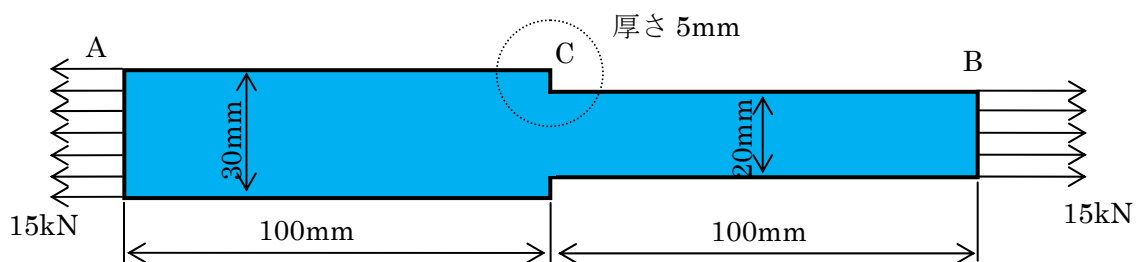


図2

AC 部は長さ $l = 100\text{mm}$ 、幅 $a = 30\text{mm}$ 、CB 部は長さ $l = 100\text{mm}$ 、幅 $b = 20\text{mm}$ とし、いずれも厚さは $t = 5\text{mm}$ とする。この棒の両端に $P = 15\text{kN}$ の引張り力を作用させて引張った場合の棒の横断面に生ずる応力を求めながら応力集中について考えよう。なお、図 2 では集中力でなく分布力を作用させており、その総和が図 1 の集中力 P と等しい 15kN である。集中力が作用している場所の近傍における応力や変形の状況については本ホームページの「描きながら考える材料力学」第 1 章

<http://homepage2.nifty.com/ymhagisan/zaiegaku/henkei.htm>

に詳しく示してある。

AC、CB いずれの区間も内力 N は外力 15kN と等しくなるので、それぞれの横断面での応力は、「よくわかる材料力学」、式 (1・16) から

$$\sigma_{AC} = \frac{N}{at} = \frac{15000}{30 \times 5} = 100 \text{ MPa} \quad (1)$$

$$\sigma_{CB} = \frac{N}{bt} = \frac{15000}{20 \times 5} = 150 \text{ MPa} \quad (2)$$

となる。

また、AC 間、CB 間の伸びはそれぞれ、式 (1・25) から

$$\lambda_{AC} = \frac{Nl}{EA} = \frac{15000 \times 100}{206000 \times 30 \times 5} = 0.049 \text{ mm} \quad (3)$$

$$\lambda_{CB} = \frac{Nl}{EA} = \frac{15000 \times 100}{206000 \times 20 \times 5} = 0.073 \text{ mm} \quad (4)$$

となり、全長は 0.122mm 伸びることになる。ここで、材料の縦弾性係数は鋼の縦弾性係数である、 206GPa としている。

ここまでは初等材料力学で求められることであり、「よくわかる材料力学」でも 1 章、例題 1、2、5 にその手順を示してある。しかし、ここで用いた計算方法は C 近傍の応力を求めるためには適用できない。

C 近傍での応力はかなり複雑に変化しており、このような場所における応力状態の解析は、弾性論に基づく解析、光弾性実験、ひずみゲージによる実験解析などの方法でこれまで求められてきた。これらの方法は現在でも活用されており、特に実験解析はその状況に応じて様々なところで用いられている。しかし、コンピュータの進歩に伴い、**有限要素法**による近似解析を活用することが最近では多い。

ここでも、有限要素法を用いて図 2 の例を解析しながら、応力集中について説明しよう。解析は図 2 の段の角部の丸み半径 R を図 3 に示す 0.0 、 1.0 、 5.0mm の 3 種類として行った。

現実には丸み半径が零の物体は存在しないが有限要素法で解析することはできる。なお、詳しい説明は省略するが、有限要素法は基本的には近似解析であり、厳密解析ではない。しかし、精度を上げた解析では実用上問題のない結果を得ることができる。

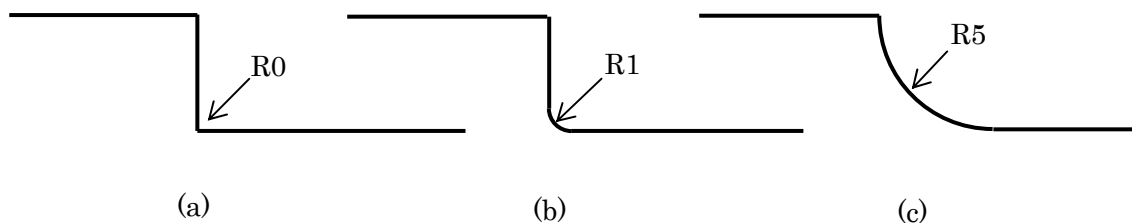


図3 図2におけるC部の拡大図

図4 (a)~(c)は図2の問題を解析した結果である。応力の高低を色で示してあり、青に近いほうが応力は低く、赤に近い色ほど応力が高い。図の(a)~(c)ともに、同じ色の場所は応力も同じであることを示している。棒の細い部分、太い部分はそれぞれほぼ一様な色となっており、これらの場所では応力が一定であることを示している。



(a) 切欠き半径 $R = 0$ の場合



(b) 切欠き半径 $R = 1$ の場合



(c) 切欠き半径 $R = 5$ の場合

図4 段付き棒の応力分布

これらの色が一樣となっている場所の応力の解析結果は、今回程度の簡単な解析精度でも、前述の式(1)、(2)に示した引張り応力 150MPa (細い棒)、100MPa (太い棒) と比べて 1%未満の誤差で一致している。しかしながら、C の近傍では色の状態が乱れており、特に段の角では応力が高いことが、これらの箇所を拡大して示した図 5～7 からわかる。

図 5 は切欠き半径を零とした場合であり、二通りの方法で解析している。有限要素法は様々な工学分野で用いられている。基本的には物体を小さな要素に分割し、物体全体では複雑に変化する物理現象等が小さな要素内では一樣であるなど簡略化して解析する方法である。したがって、現象が急激に変化する場所では要素を細かくしなければならない。

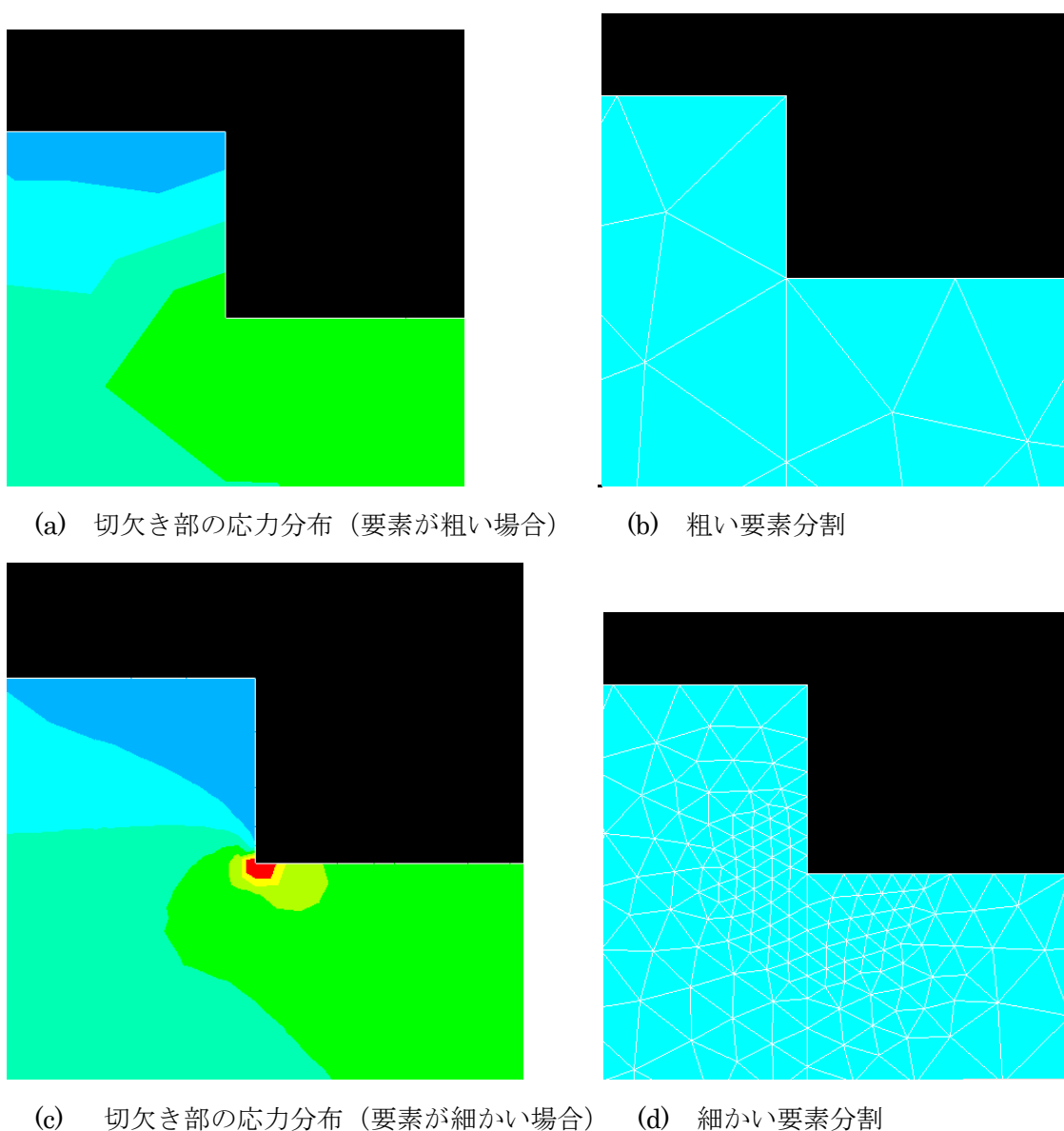


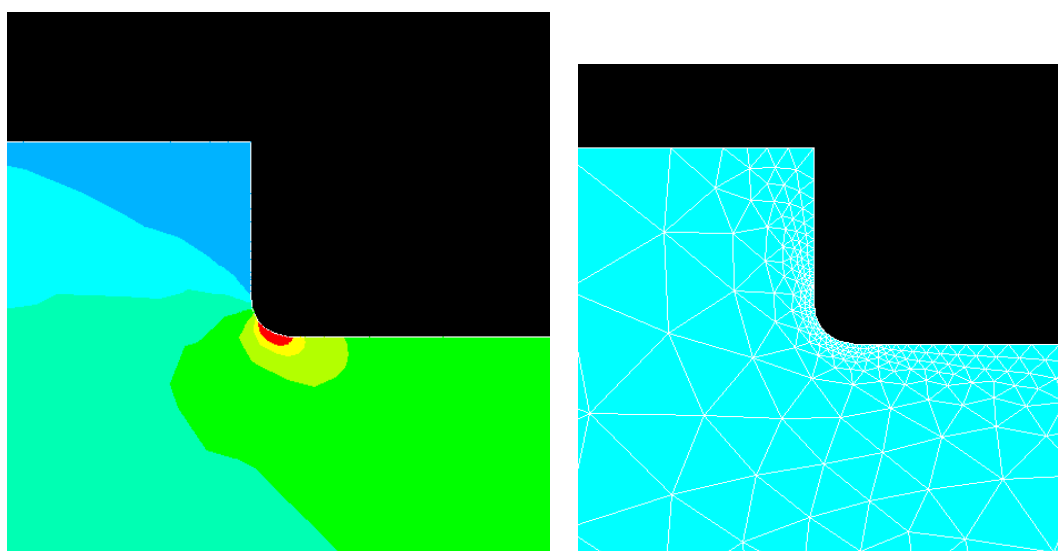
図 5 切欠き半径 $R = 0$ の場合の拡大図

図5のように切欠き半径が限りなく小さくなる場所では応力の値は急激に増加するが、図5(b)のように大きな要素（ここでは三角形要素を用いている）を用いて解析すると、図5(a)のように、そのような兆候は認められない結果を導き、正確な解析はできない。図(d)のように要素を小さくすれば、図5(c)のように切欠き先端に高い応力状態があることが明らかになる。しかしながら、この場合、切欠き先端の丸み半径は零であり、いくら細かくしても正しい解析結果は得られない。図5(a)の解析結果では最大応力は186MPa、図5(c)の解析結果では393MPaとなり、さらに細かくすればより高い最大応力が得られる。

有限要素法は現在工学の分野でかなり広く用いられているが、あくまでもコンピュータ上での実験解析である。解析物体のモデル化の精度や要素分割の判断を誤ると実際と異なる結果が示されることに十分注意するべきである。

切欠き先の丸み半径が有限である図6、7の場合には要素の細かさがある程度以下であれば、要素の大きさに関係なく、実用上問題のない精度で結果が得られる。切欠き半径1.0mmの場合の最大応力は約430MPa、切欠き半径5.0mmの場合には約260MPaとなっている。図中の(b),(c)は今回の解析での要素の分割状況を示している。

なお、最大応力とその場所の平均応力との比を**応力集中係数**と呼ぶが、この場合、切欠き先半径 $R = 1.0\text{ mm}$ の場合の応力集中係数 α は $\alpha = 430/150 = 2.9$ 、 $R = 5.0\text{ mm}$ の場合には $\alpha = 260/150 = 1.7$ となり、丸み半径が大きいくほど応力集中係数は小さくなる。



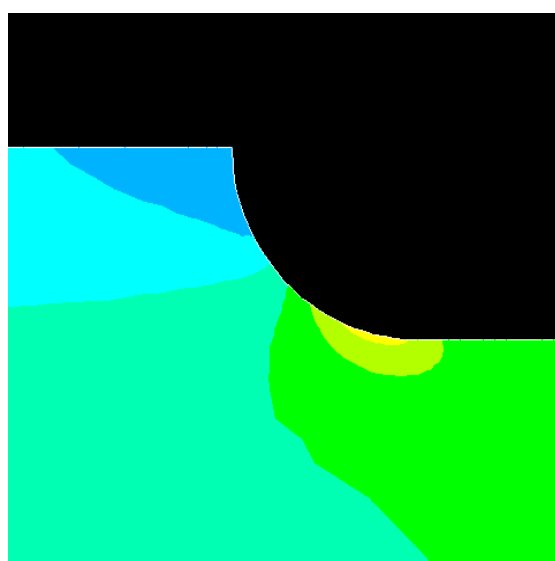
(a) 切欠き部の応力分布

(b) 要素分割の状態

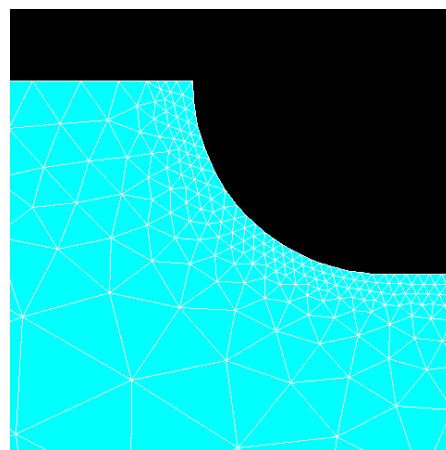
図6 切欠き半径 $R = 1$ の場合の拡大図

この結果からもわかるように、切欠き部の最大応力は初等材料力学で計算される値に比べて大きくなる。またその値は切欠き半径に依存する。切欠き半径の大きさは機械・構造物に対して**機能**上問題とならないことが多いが、このような箇所についても十分考慮して設計を行わなければ、機械・構造物の**強度**上の問題を引き起こし、思わぬ状況で破壊し、重大な事故にもつながることがある。

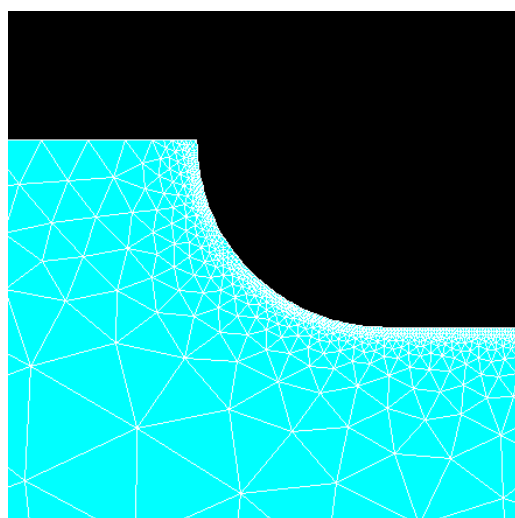
また、棒の全長の伸びは材料力学の計算では式(3),(4)によって 0.122mm となったが、有限要素法解析でもいずれの切欠き形状の場合もほぼ 0.122mm となり、誤差は 1%以下となる。C 部において応力は乱れるものの、全長の伸びに対して応力集中部の影響は少ない。



(a) 切欠き部の応力分布



(b) 要素が粗い場合



(c) 要素が細かい場合

図 7 切欠き半径 $R = 5$ の場合の拡大図