

## 第 54 話 焼ばめ応力の求め方

2010 年 5 月 20 日 作成

萩原芳彦

第 54 話では物体の熱変形を利用したスイッチの話をしたが、物体の温度変化による膨張・収縮の性質は物体を結合させるときにも用いられる。その代表的なものが焼嵌め（やきばめ）である。ここではその計算例を紹介しよう。図 1(a)は外径が $d$ 、肉厚が $t_1$ の薄肉円筒①であり、図 1(b)は内径が図 1(a)の円筒①の外径 $d$ よりわずかな量 $\delta$ だけ小さい、肉厚 $t_2$ の薄肉円筒②である。いま円筒②だけを加熱し、膨張させて内径を $d$ 以上に膨らませれば、円筒①を図 1(c)のように内側にはめ込むことができる。

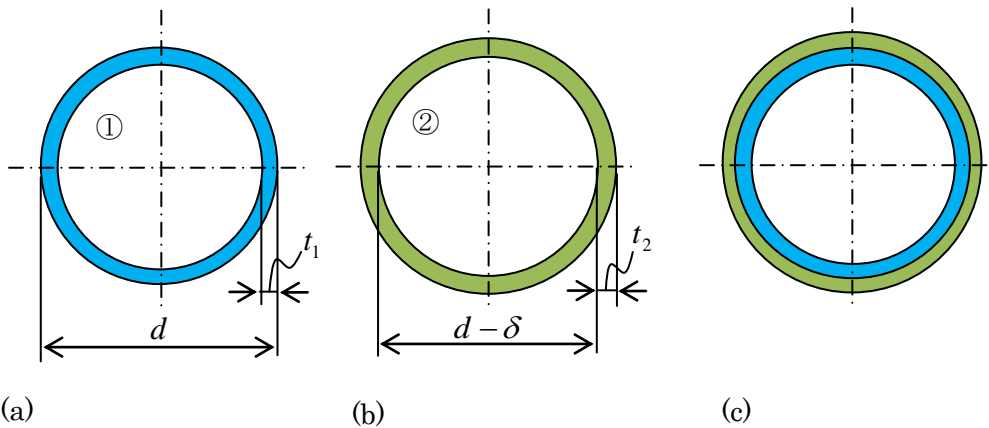


図 1

はめ込んだ後に元の温度に戻れば、円筒②は縮み、円筒①を締めつけることになる。①の円筒の外径は②の円筒の内径より大きいので温度が下がった状態では両円筒間に圧力が作用することになり、容易には二つの円筒ははずれない状態となる。このようにして結合することを**焼嵌め（やきばめ）**と呼び、様々な利用方法がある。ここでは図 1 の例において、二つの円筒間の面圧  $p$  や円筒に生ずる応力を求めよう。

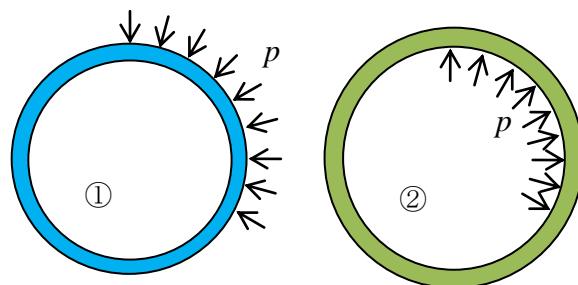


図 2

図 2 は、材料力学問題を解くときの基本手順の通り、図 1(c)の 2 円筒が合体した状態を個々の円筒に分解したものである。円筒①の外径は円筒②の内径より実際には大きいので、接触面では押し合う力が働く状態となる。すなわち、両円筒には作用・反作用の力が働く。その単位面積当たりの力、圧力（面圧）を  $p$  と仮定すれば、この問題は教科書の 8・6 節において説明した薄肉円筒に外圧あるいは内圧が作用している問題と同じに考えることができる。

したがって、教科書の式 (8・51) を用いて、①、②の円筒に生ずる円周方向応力  $\sigma_{t1}$ 、 $\sigma_{t2}$  は以下ようになる。

$$\sigma_{t1} = -\frac{pd}{2t_1} \quad (1)$$

$$\sigma_{t2} = \frac{pd}{2t_2} \quad (2)$$

ここで、 $p$  は未知量であり、変形条件、境界条件から、以下のように求められる。

まず、**変形条件**を考えてみよう。円筒①、②の円周方向ひずみを  $\varepsilon_{t1}$ 、 $\varepsilon_{t2}$  とすれば、応力とひずみの関係から、

$$\varepsilon_{t1} = \frac{\sigma_{t1}}{E_1} = -\frac{pd}{2t_1E_1} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{t2} = \frac{\sigma_{t2}}{E_2} = \frac{pd}{2t_2E_2} \quad (4)$$

となる。ここで、 $E_1$ 、 $E_2$  は①、②の円筒の縦弾性係数である。また、円筒は薄肉であるので、半径方向応力は円周方向応力に比べて十分小さく、無視できる。なお、円筒の軸方向応力は零としている。

以上の変形によって、円筒の直径もそれぞれ変化する。①、②の円筒の直径の減少あるいは増加量を  $\delta_1$ 、 $\delta_2$  とすれば、それぞれの円筒の円周方向ひずみは直径の変化を用いて、

$$\varepsilon_{t1} = \frac{\pi(d - \delta_1) - \pi d}{\pi d} = -\frac{\delta_1}{d} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{t2} = \frac{\pi(d + \delta_2) - \pi d}{\pi d} = \frac{\delta_2}{d} \quad (6)$$

となる。以上が変形条件から得られる関係式である。

次に**拘束条件**は、①の円筒の外径が②の円筒の内径よりも  $\delta$  だけ大きいことから、面圧  $p$  による円筒①の外径の縮み量  $\delta_1$  と円筒②の内径の伸び量  $\delta_2$  の絶対値の和が  $\delta$  と等しくな

ければならない。すなわち、

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta \quad (7)$$

なる関係が得られる。

式(5),(6)を式(3),(4)に代入し、得られた $\delta_1$ 、 $\delta_2$ を式(7)に代入すれば、両円筒間に作用する面圧 $p$ は、

$$p = \frac{2t_1t_2E_1E_2\delta}{(t_1E_1 + t_2E_2)d^2} \quad (8)$$

となり、両円筒の円周方向応力はそれぞれ以下のようにになる。

$$\sigma_{t1} = -\frac{t_2E_1E_2\delta}{(t_1E_1 + t_2E_2)d} \quad (9)$$

$$\sigma_{t2} = \frac{t_1E_1E_2\delta}{(t_1E_1 + t_2E_2)d} \quad (10)$$

以上が薄肉円筒同士の焼ばめにおいて生ずる応力、両円筒間の面圧の概要である。