

第53話 はりがスイッチになる話

2010年5月6日 作成

萩原芳彦

図1は、形状は同じ（厚さ h 、幅 b 、長さ l ）であるが、材質は異なる帯板（線膨張係数がそれぞれ α_1 、 α_2 ）を貼りあわせたものである。この帯板を加熱すると、貼りあわせた板は膨張する。しかし、2枚の板の線膨張係数が異なるため膨張量は異なり、内部には熱応力が生ずると同時に板は反ることになる（第4、6話参照）。例えば、この板を図2のように左端を固定した状態で加熱すれば、図2(a)のように加熱前に平板であった板は加熱後には図2(b)のように反る。この図では上側の板のほうが下側の板に比べて線膨張係数が大きいものと考えている（ $\alpha_1 > \alpha_2$ ）。したがって、右端では接点と板が離れることになり、温度変化のある場所での ON、OFF スwitchの役割を果たすことになる。このような条件を有するように作られた金属を**バイメタル**と呼び、温度変化の生じるようなところにおいて電気のスイッチあるいはその他の用途として用いられる。

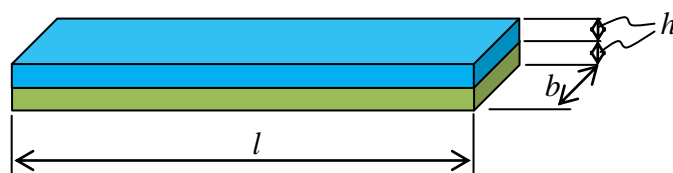


図1

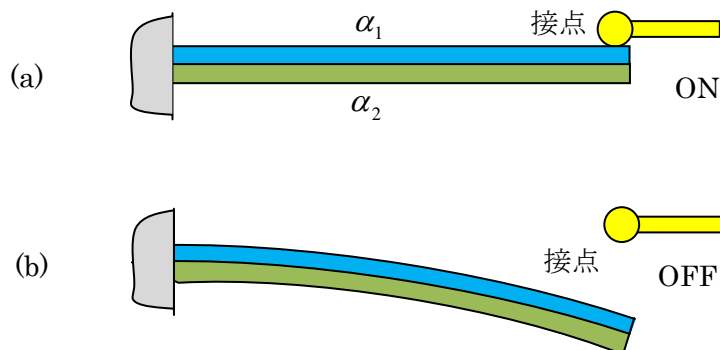


図2

以上の説明では 2 枚の板は同じ形状としたが、これは以降の説明における式の取り扱いを簡単にするためのものであり、言うまでもないことではあるが、二つの板は同一形状である必要はない。

図 1 あるいは図 2(a)に示したバイメタルの温度変化が t の時、どれだけこの板が反るかを求めよう。教科書 2・5 節において説明したように、熱応力の問題解法の基本手順は、**‘個々の部材の拘束を取り除いた状態において温度変化による自由膨張や収縮を各部材に行わせた後、部材が組み立てられている状態における拘束条件を考慮しながらつり合い条件式、変形条件式を求め、それらを連立させて解く’**である。

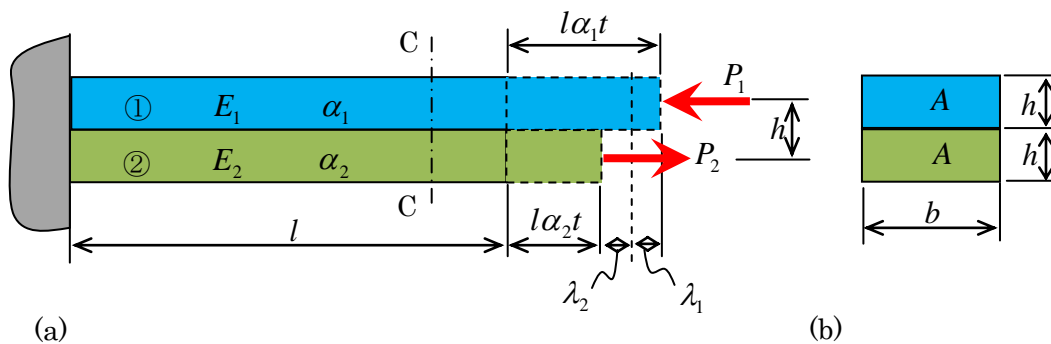


図 3

図 3(a)は上述のバイメタルの個々の部材が温度 t だけ上昇した時の状況を示している。部材①、②はそれぞれ独立に自由膨張し、長手方向の全長はそれぞれ $l\alpha_1 t$ 、 $l\alpha_2 t$ だけ伸びている。図では両部材の線膨張係数間には、 $\alpha_1 > \alpha_2$ が成り立つと考えて示している。実際には両部材は貼り合わせてあるので独立に伸縮することはできない。そこで、問題を解くため、以下のように 2 段階において考えよう。なお、当然のこと、2 部材は厚さ方向や幅方向にも異なる膨張をするがここでは長手方向のことだけを考える。

第一段階：

実際には部材①、②は貼りついており、お互いは図 3(a)のように自由に膨張することができず、膨張できる量は同じである。したがって、図 3(a)に示すように、①は λ_1 だけ縮み、②は λ_2 だけ伸びる必要がある。このために要する力を図に示す P_1 、 P_2 と仮定し、実際の膨張量は l に比べて十分小さいものとすれば、以下の式が成り立つ。なお、両部材の縦弾性係数を E_1 、 E_2 、断面積は両部材とも等しく A としている。ここで、伸縮量は絶対値で示している。

$$\lambda_1 = \frac{P_1(l + l\alpha_1 t)}{E_1 A} = \frac{P_1 l}{E_1 A} \quad (1)$$

$$\lambda_2 = \frac{P_2(l + l\alpha_2 t)}{E_2 A} = \frac{P_2 l}{E_2 A} \quad (2)$$

したがって、両部材が図 3(a)のように**まっすぐな状態で接着状態を保つものと仮定**すれば、両部材の温度変化後の軸方向ひずみ（単位長さ当たりの伸縮量） ε_1 、 ε_2 はそれぞれ、

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 t - \frac{P_1}{E_1 A} \quad (3)$$

$$\varepsilon_2 = \alpha_2 t + \frac{P_2}{E_2 A} \quad (4)$$

となる。ここで、それらは等しくなければならないので、

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (5)$$

が成り立つ。

第二段階：

実際には第一段階で示したように、二つの部材は温度変化以前と同じく直線を保つことはできない。それは、図 3(a)に仮定した力 P_1 、 P_2 の作用によるものである。任意断面 C-C における軸方向の力のつり合い条件から、 P_1 と P_2 は向きが逆で大きさが等しくなければならない、

$$P_1 = P_2 \quad (\text{これを } P \text{ と置く}) \quad (6)$$

が成り立たなければならない。ここで、これらの力の作用線は一致していないことから、これらは偶力となり、これとつりあうための力のモーメント、

$$M = Ph \quad (7)$$

が必要になる。このモーメントは図 4 に示すように部材にとっては曲げ作用を生じさせる曲げモーメントであり、部材①、②に分配される。これによってバイメタルは反ることになる。部材①、②に分配されるモーメントを M_1 、 M_2 とすれば、

$$M = Ph = M_1 + M_2 \quad (8)$$

なる関係がなりたつ。

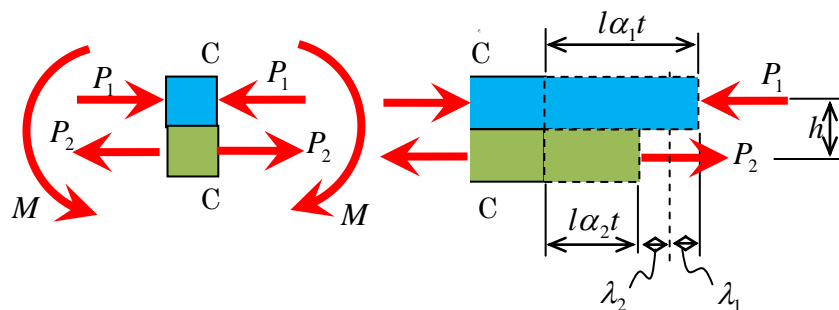


図 4

部材①、②に上記の曲げモーメントが作用して曲げられた時、それぞれの中立軸の曲率半径 r_1 、 r_2 は、教科書の式 (4・10) から、

$$\frac{1}{r_1} = \frac{M_1}{E_1 I_1} \quad (9)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{M_2}{E_2 I_2} \quad (10)$$

と表わされる。ここで、 I_1 、 I_2 は部材①、②の断面 2 次モーメントである。

以上の 2 段階の手順で求められた式を用い、2 部材が結合していることによる以下の境界条件を考慮して問題は解かれる。すなわち、このようにして部材が曲がったときの接着面における曲げによるひずみ ε_{M1} 、 ε_{M2} は教科書、式 (4・1) において接着面の位置が、部材①、②に対してそれぞれ $y = -h/2$ 、 $y = h/2$ であることを考慮すれば、

$$\varepsilon_{M1} = -\frac{h}{2r_1} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{M2} = \frac{h}{2r_2} \quad (12)$$

となる。

両部材は接着面でずれることはないので、両部材の接着面における軸方向ひずみは等しくなければならない。すなわち、式(3),(4),(11),(12)から、

$$\alpha_1 t - \frac{P}{E_1 A} - \frac{h}{2r_1} = \alpha_2 t + \frac{P}{E_2 A} + \frac{h}{2r_2} \quad (13)$$

が成り立たなければならないことになる。

さらに、板の厚さを十分薄いとみなせば、

$$r_1 = r_2 \quad (\text{これを } r \text{ と置く}) \quad (14)$$

と考えてよいので、式が簡略化され、

$$(\alpha_1 - \alpha_2)t = \frac{h}{r} + \frac{P}{A} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (15)$$

となる。

また、式(9),(10)を式(8)に代入し、式(14)の関係を適用すれば、

$$Ph = \frac{1}{r} (E_1 I_1 + E_2 I_2) \quad (16)$$

となる。両部材の形状は等しいことから、 $I_1 = I_2 = bh^3/12$ であり、断面積はいずれも

$A = bh$ であることを考慮し、式(15),(16)から曲率半径 r を求めれば、

$$r = \frac{h}{(\alpha_1 - \alpha_2)t} \cdot \frac{E_1^2 + 14E_1E_2 + E_2^2}{12E_1E_2} \quad (17)$$

となる。

板の形状が全長にわたり一様であるので変形も全長にわたり変わらず、バイメタルの変形後の形は円弧となる。図5を参照すれば、たわみ量 δ は曲率半径 r を用いて、以下のようになる。なお、計算過程では三角関数の級数展開の式ならびに $r\theta = l$ を用い、曲率半径が十分大きく、 θ は十分小さい場合を想定している。

$$\delta = r(1 - \cos \theta) = r \left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \right) \right] \approx r \frac{\theta^2}{2} = \frac{l^2}{2r} \quad (18)$$

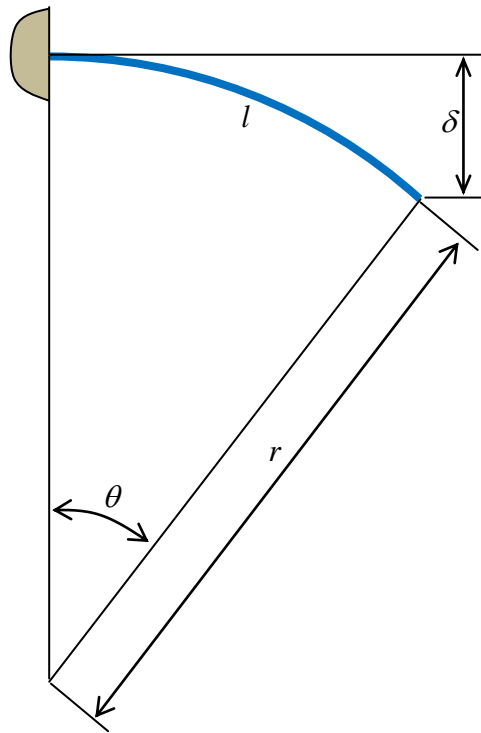


図5