

第 51 話 柱を圧縮させても引張り応力が生ずる話

2010 年 1 月 14 日 作成

萩原芳彦

第 26 話において、棒を引っ張ったときにその方法が異なると生ずる最大の引張り応力はかなり異なることを示した。ここでは柱の様に圧縮状態で使用される、棒を圧縮した場合に応力がどのように変わるかを話そう。図 1 (a) は第 26 話と同じ棒であり、幅 $2h$ 、奥行き b の長方形断面を有する長さ l の棒である。下端を固定し、上端に集中力 P を第 26 話とは異なり棒を圧縮させる方向に作用させる。図 1 (b) は上述の棒の横断面（長方形）を示したものである。なお、集中力の作用位置は A 部における断面の中心、すなわち長方形断面の図心、から右に a だけずれたところ（図(b)の赤印位置）にあるものとする。

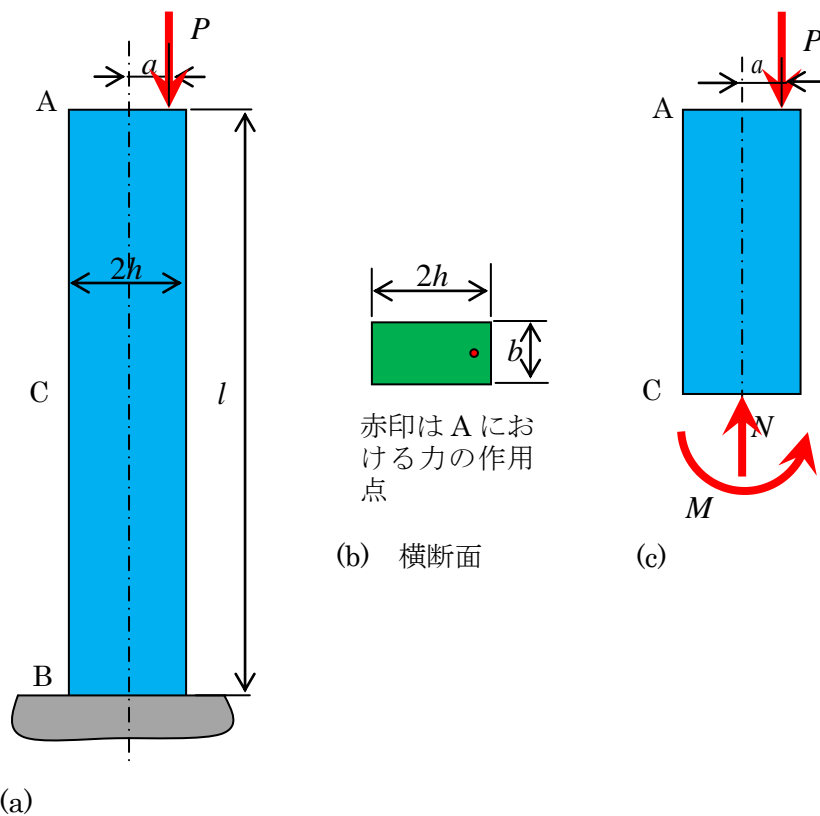


図 1

この棒に生ずる応力を求めよう。図 1 (c) は棒の自由端 A から任意の位置 C で棒を仮想的に切断し、その A 側（上側）部分を示したものである。C における横断面には、AC 部分に作用している力のつり合いを保つため、図に示すような向きの内力 N と内力モーメント M が存在する。すなわち、 N 、 M は以下ようになる。

$$N = -P \quad (\text{圧縮の軸力}) \quad (1)$$

$$M = Pa \quad (\text{曲げモーメント}) \quad (2)$$

したがって、この横断面には式(1)の軸力に対応した垂直応力 σ_0 として、

$$\sigma_0 = \frac{N}{A} = -\frac{P}{2bh} \quad (3)$$

なる一様な圧縮の垂直応力が分布する（「よくわかる材料力学」、式（1・16）参照）。ここで、 A は横断面積である。

また、曲げモーメント M に応じて、この断面には下記の式で示す曲げ応力が分布する。

$$\sigma_b = \frac{M}{I} y = \frac{3Pa}{2bh^3} y \quad (4)$$

ここで、 I は断面 2 次モーメント、 y は横断面の図心からの距離である（「よくわかる材料力学」、式（4・11）参照）。この式から、曲げモーメントによる最大垂直応力 σ_{\max} は $y = h$ 、すなわち棒の左側表面において生じ、以下ようになり、これは引張りの垂直応力である。

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pa}{2bh^2} \quad (5)$$

これらの結果から、横断面上の最大垂直応力は図 1(a)の柱の左側表面において生じ、下記の式で表わされる。

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \sigma_{\max} = -\frac{P}{2bh} + \frac{3Pa}{2bh^2} = \frac{P}{2bh} \left(\frac{3a}{h} - 1 \right) \quad (6)$$

この式からわかるように、 $a > \frac{h}{3}$ の場合には最大の垂直応力は引張り応力となり、**圧縮荷重を作用させているにもかかわらず引張りの垂直応力が生ずる**のである。柱が圧縮荷重を受けて支えている場合などには注意する点である。なお、上記の計算では変形は微小としているが、荷重の作用点が $a = \frac{h}{3}$ よりも図心近くにあっても変形が大きくなると曲げモーメントの影響は大きくなり、引張りの応力が生ずることにもつながる。

図 2、3 は柱が圧縮荷重を受ける場合の応力分布を有限要素法解析で可視化したものである。いずれも断面形状は幅 $2h = 60 \text{ mm}$ 、奥行き $b = 30 \text{ mm}$ の長方形断面とし、柱の高さは図 2 が 500 mm 、図 3 が 150 mm である。また、いずれの柱も下端を固定し、上端に圧縮力を柱の中心（図心位置）から (a) 0 mm （図心）、(b) $h/3 = 10 \text{ mm}$ 、(c) $2h/3 = 20 \text{ mm}$ 、(d) $h = 30 \text{ mm}$ （右表面）の 4 か所にそれぞれ作用させた場合の柱の軸方向（長手方向）応

力の分布を示している。すなわち、式(3),(4)の和である次式の分布状態を表している。

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_b = -\frac{P}{2bh} + \frac{3Pa}{2bh^3} y$$

図において黄色の部分は何力も零に近いところを示しており、荷重の作用点が図心から $h/3$ の位置にある図(b)の柱の場合、柱の左側が零となっていることがわかる。図(c),(d)の場合には柱の左側表面近くは引張りの垂直応力が生じている。また、図(a)の場合には全断面が一様な圧縮応力となっている。さらに、図(2),(3)を比較してわかるように、これらの様子は柱の長さ l が大きくても小さくても変わらない。

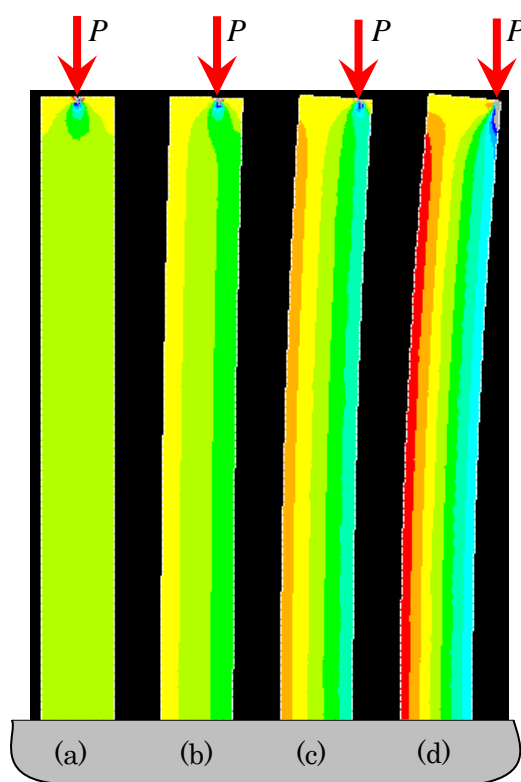


図 2

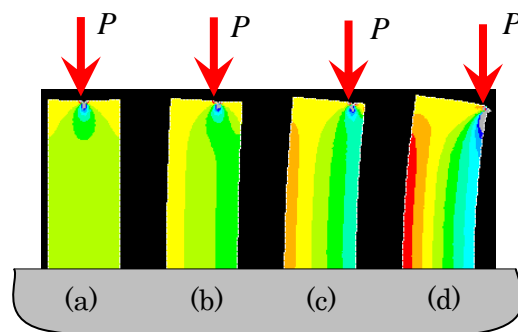


図 3

このようなことから、柱の場合には圧縮荷重が偏心して作用しないようにする工夫が大切である。状況にもよるが、図 4 の右側の柱の様に圧縮力の作用する上部を細くすることで荷重の当たるところが中心部近くになるようにすることも一案である。左側の様な支え方の場合には上に置かれたはりが荷重によってたわむと柱と当たる個所は右側の B 部のほうに移動し、偏心荷重となりやすい。

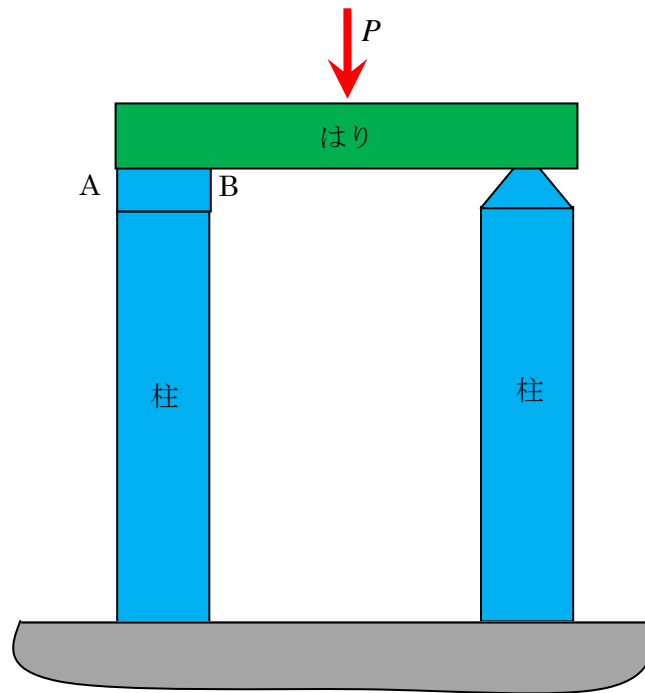


図 4

上述のことは前述の式の導出仮定からわかるように柱の長さに関係なく生ずる現象である。また、図 2, 3 の解析例では教科書 10 章に説明するオイラーの座屈荷重が生ずる状況ではないが、棒が細長くなると座屈現象も起こるのでさらに注意が必要である。