

第 49 話 薄肉円筒の式で厚肉円筒問題を計算する

2008 年 12 月 3 日 作成

萩原芳彦

薄肉円筒に内圧が作用しているときの円筒に生ずる応力の計算式は初等材料力学の教科書、参考書では多くは組合せ応力のところで紹介されており、「よくわかる材料力学」においても第 8 章 8・6 節において扱っている。結論を示せば以下のようなになる。内径 $2r_1$ 、外径 $2r_2$ 、肉厚 $t(=r_2-r_1)$ の円筒に内圧 p が作用しているとき、円筒の円周方向応力 σ_t 、軸方向応力 σ_z はそれぞれ、

$$\sigma_t = \frac{pr_1}{t} \quad (1)$$

$$\sigma_z = \frac{pr_1}{2t} \quad (2)$$

となる。ここで、薄肉円筒であるので t は r_1 、 r_2 に比べて十分小さいことが条件である。

これらの式を比較すればわかるように、円周方向応力は軸方向応力の 2 倍になるので、薄肉円筒の材質に特別な方向に弱くなる要因（異方性など）がない限り、薄肉円筒に内圧を作用させた場合、破壊時のき裂は図 1 に赤色で示したように、円筒の軸方向に進展することになる。長いパイプなどの場合に内圧の低下がない限り、き裂は進み続けることになる。脆性破壊でき裂が進展する場合、き裂の進展速度は材料中を伝播する音の速さの数 10% になる可能性もあり、内容物の流出による内圧低下速度よりもき裂の進展速度のほうが速く、長手方向の広範囲にき裂が広がることも起きうる。内容物が気体であるパイプの破壊はこの場合に該当する。（「よくわかる破壊力学」、4・3 節参照）。

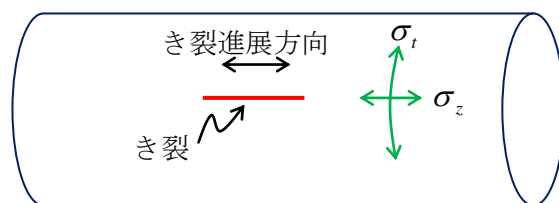


図 1

なお、「よくわかる材料力学」、p.134 にも示したように、円筒ではなく球形のタンクの場合には、応力は式(2)で示すものだけとなり、円筒形部分を含む場合の最大応力の半分の応力しか生じない。球形タンクのほうが円筒形タンクより強いのはこのことによる。

以上は薄肉円筒についての計算式の要点であるが、円筒の肉厚が厚い、厚肉円筒の場合の応力計算はやや複雑である。薄肉円筒の式(1),(2)は円筒の半径 r_1 に比べて肉厚 t は十分小さい条件の下に誘導された式であるので、その適用範囲には限界がある。では、どの程度まで半径に比べて肉厚が厚くなると計算式は適用できないことになるのであろうか。具体的に検討してみよう。

厚肉円筒に内圧や外圧が作用したときの応力は、教科書、式(8・54)に結果だけ示したが、円周方向応力 σ_t だけではなく半径方向応力 σ_r も生ずる。なお、円筒の端部に圧力がかかることによって、薄肉円筒と同様に軸方向応力 σ_z も生ずる。その誘導方法は鶴戸口他、「材料力学」下巻(裳華房)などに詳しく示されているのでここでは省略するが、それほど高度の数学を用いなくとも導くことができる。また、当然のことではあるが、式(8・54)の σ_t は円筒の肉厚 $t(=r_2-r_1)$ が円筒内半径 r_1 に比べて十分小さく、かつ $p_2=0$ の場合には式(1)と一致する。

ここでは厚肉円筒に外圧 p_2 は作用せず、内圧 p_1 だけが作用している場合について、厚肉円筒の式(教科書式(8・54))から計算される結果と薄肉円筒の式(1)から計算される結果を比較しよう。この場合、厚肉円筒の式では図2に示すように、 σ_t は円筒の内表面において最大の引張応力を示し、外表面に行くに従い小さくなる。また、 σ_r は内表面で内圧と大ききの等しい最大の圧縮応力、 $-p_1$ 、をとり、外表面に近づくにつれて圧縮応力は低くなり、外表面で零($\sigma_{r\min}=0$)となる。

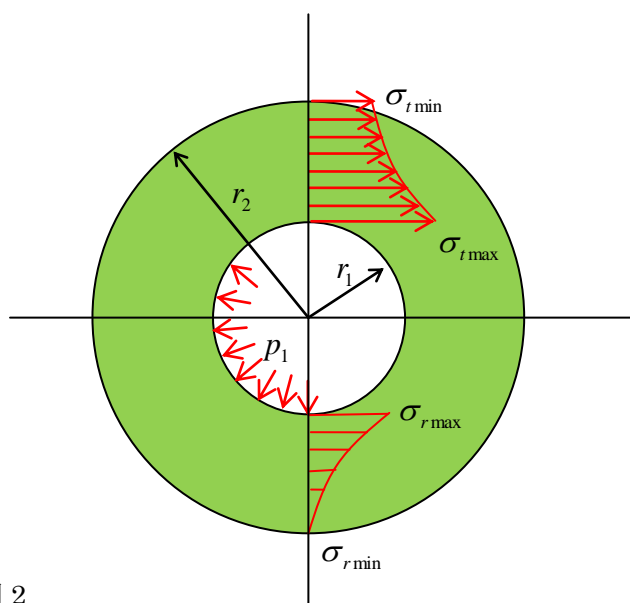


図2

ここで、最大の引張り応力をとる円筒内表面における円周方向応力 $\sigma_{t\max}$ と円筒を薄肉円筒とみなして式(1)から得られる応力 σ_t の比を求めると以下のようなになる。

$$\frac{\sigma_{t\max}}{\sigma_t} = \frac{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}{1 + \frac{r_2}{r_1}} \quad (3)$$

例えば、内径 $r_1 = 100 \text{ mm}$ 、外径 $r_2 = 110 \text{ mm}$ の場合には $\sigma_{t\max} / \sigma_t = 1.05$ となり、薄肉円筒の式によって計算した応力の 5% 程度高い円周方向応力が実際には生ずることになる。また、外径が内径の 2 倍となると、薄肉円筒として計算した応力の 1.7 倍程度の応力が生ずることになる。内外径の差が大きくなればその違いはさらに大きくなる。薄肉円筒の計算式は簡単であるので概算値を得るのには便利であるが、肉厚が厚くなるとこのように大きな違いを生じることを頭に入れておくとよいであろう。

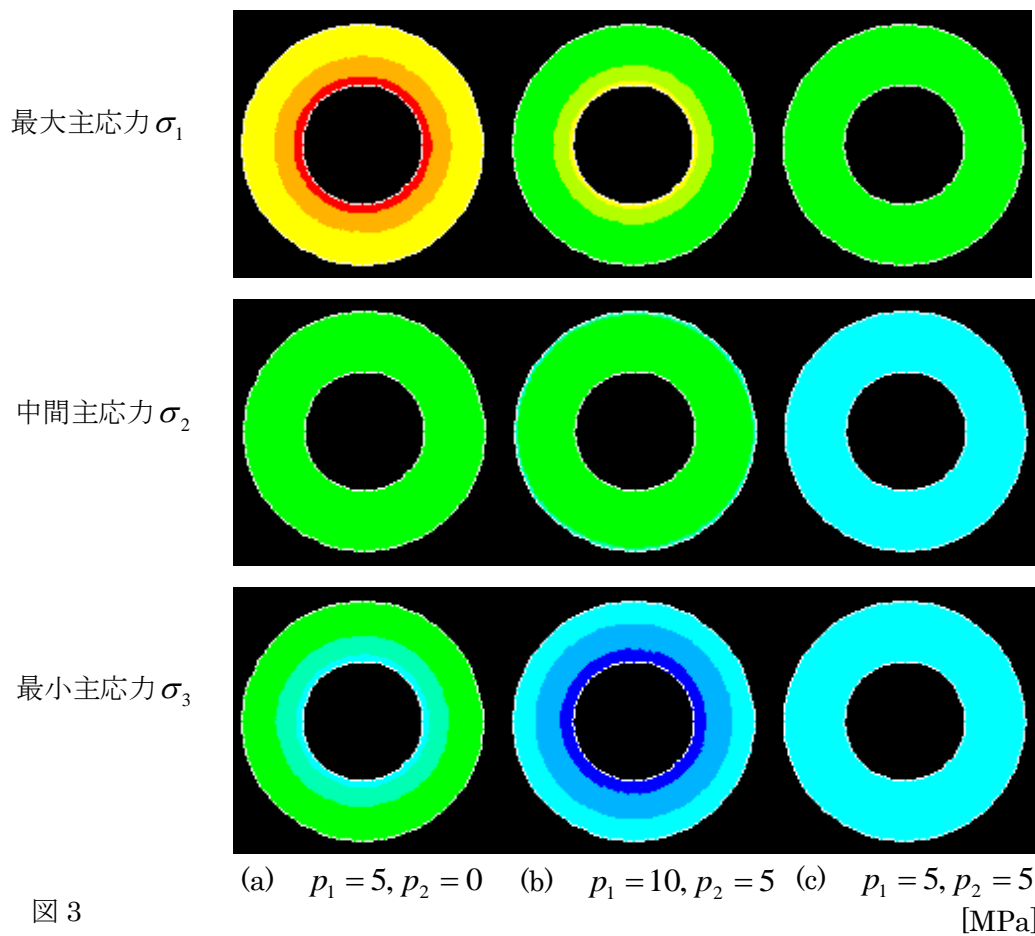


図 3

なお、以上では厚肉円筒に内圧だけが作用した場合であるが、内外圧 p_1 、 p_2 が同時に作用している場合には、応力分布は教科書の式 (8・54) から推測できるように内外の圧力差 $p_1 - p_2$ だけでは決まらず、個々の圧力の大きさによって異なるものとなる。図 3 はそのことを有限要素法で解析し、可視化したものであり、違いがわかるであろう。

図 3 は円筒の内半径 $r_1 = 100$ mm、外半径 $r_2 = 200$ mm とし、(a) は $p_1 = 5$ MPa、 $p_2 = 0$ 、(b) は $p_1 = 10$ MPa、 $p_2 = 5$ MPa、(c) は $p_1 = 5$ MPa、 $p_2 = 5$ MPa の条件での 2 次元有限要素法解析結果 (平面応力状態) である。上から順に最大主応力 σ_1 、中間主応力 σ_2 、最小主応力 σ_3 の分布状態を色で示してある。赤色が最も高い応力 (引張応力) 状態であり、濃い青色が最も低い応力 (圧縮応力) 状態である。赤色から黄色、青色になるに従い応力は減少する。緑色が零に近い応力状態であり、黄色は引張り応力、青色は圧縮応力状態である。図からわかるように、内外圧の差が同じであっても内外圧の大きさの違いによりかなり応力状態は異なることがわかる。

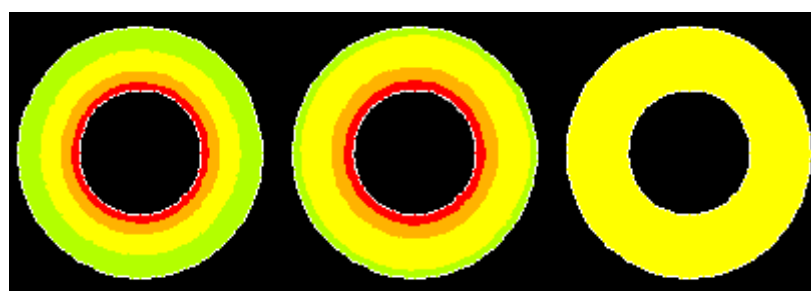


図 4 (a) $p_1 = 5, p_2 = 0$ (b) $p_1 = 10, p_2 = 5$ (c) $p_1 = 5, p_2 = 5$ [MPa]

図 4 は図 3 と同じ条件の解析結果をミーゼス応力で表示したものである。ミーゼス応力は主応力差、すなわち主せん断応力を基本にして求められるもので、降伏条件と関連する評価法であるが、この場合には条件(a)と(b)でほぼ同じ分布が得られる。表計算ソフトなどを使って教科書の式 (8.54) に数値を入れ、いろいろな条件で結果を比較するのもよいであろう。