

第 48 話 カスチリアノの定理適用時の注意点

2009 年 11 月 19 日 作成

萩原芳彦

第 47 話において図 1 のような簡単なトラス問題を例に挙げ、解くときの注意点を示した。本話ではひずみエネルギー法によるたわみ量の求め方についての注意点を示しておこう。

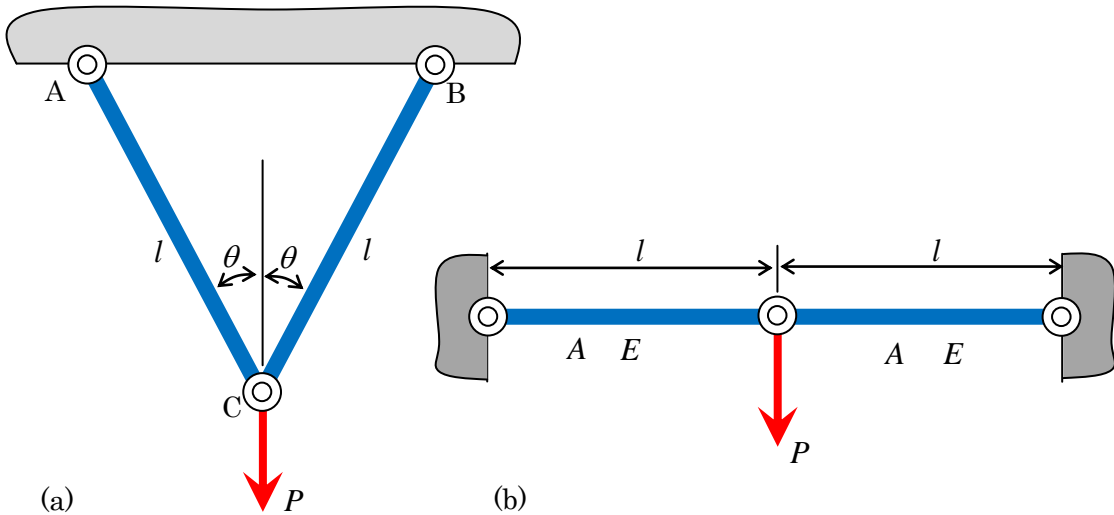


図 1

図 1(a)の例の場合、部材に生ずる軸力 N が第 47 話の式(3)から、

$$N = R_{CA} = R_{CB} = P / 2 \cos \theta \quad (1)$$

となるので、2 部材 AC, BC に蓄えられるひずみエネルギー U は以下ようになる。

$$U = 2 \cdot \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{P^2 l}{4EA \cos^2 \theta} \quad (2)$$

したがって、カスチリアノの定理（教科書、式 (9・38) など）から、C の垂直方向のたわみ量 δ_C は、

$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl}{2EA \cos^2 \theta} \quad (3)$$

となる。

第 47 話ではたわんだときの形状を描きながらたわみ量を求めたが、カスチリアノの定理を用いれば、形状の変化などを気にせず、このようにたわみを簡単に求めることができ、ひずみエネルギー法の利点が見える。

では、前話でも示した図 1(b)の場合にはどうなるであろうか。この場合の軸力 N は第 47 話の式(16)から、

$$N = \frac{1}{2} \sqrt[3]{EAP^2} \quad (4)$$

となるので、2 部材に蓄えられるひずみエネルギー U は、

$$U = 2 \cdot \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{l^3}{EA}} P^{\frac{4}{3}} \quad (5)$$

となる。

ここで、図 1(a)の場合と同様に、カスチリアノの定理を適用して C 点の垂直たわみ δ_C を求めれば、

$$\delta_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{Pl^3}{EA}} = \frac{\delta}{3} \quad (6)$$

となり、前話の式(15)で求められたたわみ量 δ の 3 分の 1 となってしまう、解が一致しない。

これは、式(5)に対してカスチリアノの定理を適用したことに問題があるからである。**カスチリアノの定理は教科書の 152 ページに説明したように、荷重とたわみの間にフックの法則が成り立つときのみ適用できる**のである。式(6)を見ればわかるように、この場合には荷重 P とたわみ δ_C は比例関係となっていない。

この点を荷重と変位の関係を示す図 2(a),(b)のグラフを用いて説明すると以下のようなになる。なお、図(a)はフックの法則が成り立つ場合、図(b)はフックの法則が成り立たない場合の荷重と変位の関係を示す図である。

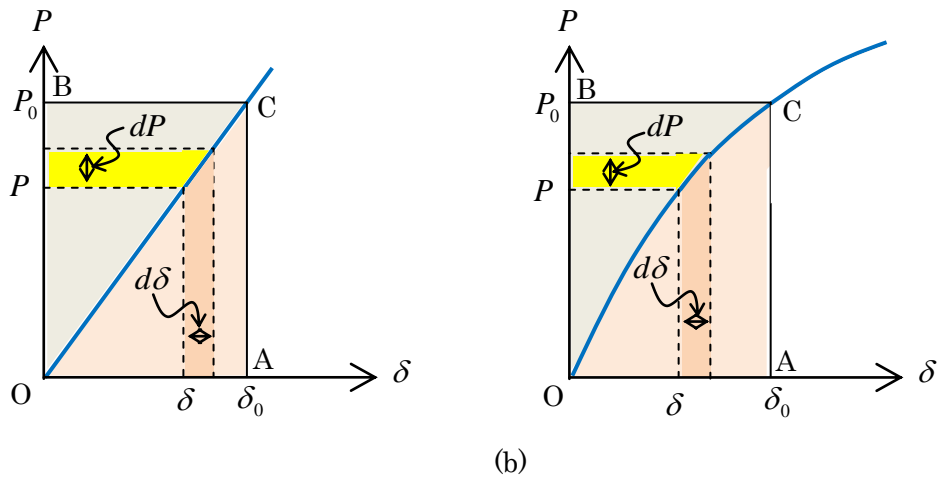


図 2

弾性ひずみエネルギー U は教科書、9・1節にも示したように、力 P とその変位量 δ の関係において、刻々と変化する力のなした仕事量 $Pd\delta$ の積分値であり、

$$U = \int dU = \int_0^{\delta_0} Pd\delta \quad (7)$$

で示される。この量は図2において荷重と変位の関係を表す直線あるいは曲線の下側の面積OCAに等しい。このことは荷重と変位がフックの法則に従うか否かに関係なく成り立つ。

また、式(7)からもわかるように、

$$dU = Pd\delta \quad (8)$$

の関係が基本であり、この式は見方を変えれば、

$$\frac{dU}{d\delta} = P \quad (9)$$

とも表現できる。

一方、図2の荷重と変位の直線あるいは曲線の上側に着目すれば、

$$dU' = \delta dP \quad (10)$$

$$U' = \int dU' = \int_0^{P_0} \delta dP \quad (11)$$

なる関係が得られ、 U' は図2のOCBの面積になる。これを**コンプリメンタリエネルギー**、あるいは**応力エネルギー**と呼ぶ。また、式(10)は見方を変えれば、以下のようにも表せる。

$$\frac{dU'}{dP} = \delta \quad (12)$$

図1(a)のようにフックの法則が成り立つ場合には面積OCAとOCBは等しくなり、

$$U = U'$$

なる関係が成り立ち、式(12)から、

$$\delta = \frac{dU'}{dP} = \frac{dU}{dP} \quad (13)$$

がえられるので、ひずみエネルギーを荷重で微分すると変位が求められることになる。しかし、図2(b)のようにフックの法則が成り立たない場合にはこのようなことは成り立たない。ただし、いずれの場合にも

$$U + U' = P_0\delta_0 \quad (14)$$

の関係は成り立つ。

図1(b)の場合の荷重と変位の関係式である、第47話の式(15)を用いて、

$$U' = \int \delta dP = \int_0^{P_0} \sqrt[3]{\frac{Pl^3}{EA}} dP = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{l^3}{EA}} P^{\frac{4}{3}} \quad (15)$$

を求め、この式を力 P で微分すれば、

$$\delta = \frac{\partial U'}{\partial P} = \sqrt[3]{\frac{Pl^3}{EA}} \quad (16)$$

が得られることが確認できる。正しいたわみ量が得られる。

このようにコンプリメンタリエネルギーを用いればフックの法則が成り立たない場合においてもカスチリアノの定理は成り立つのである。なお、

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = P \text{ をカスチリアノの第 1 定理、}$$

$$\frac{\partial U'}{\partial P} = \delta \text{ をカスチリアノの第 2 定理}$$

と呼び区別することもある。中原一郎「材料力学」上巻（養賢堂）、尾田十八他、「材料力学」応用編（森北出版）なども参照するとよいであろう。