

第 45 話 板の曲げははりの曲げとは違います

2009 年 10 月 8 日 作成

萩原芳彦

図 1 に示した幅 b 、厚さ h 、長さ l の直方体の幅 b と厚さ（高さ） h が同程度の寸法であり、それらの寸法が長さ l に比べると十分小さい、図 2 のような棒状の物体が軸（長さ l 方向）に垂直な力 P を受けると曲げモーメント M が横断面（黄色）に生じ、棒は曲がる。このような状態で使われる場合、この棒状物体を**はり**と呼ぶ。

一方、厚さ h が幅 b や長さ l に比べて十分小さく、かつ幅 b は長さ l に比べて無視できるほど小さくはない、図 3 のような形状の物体は一般に**板**と呼ばれる。板を図 3 のように支え、外力 P を作用させると曲げモーメント M が横断面（黄色）に生じ、板は曲がる。図 2、3 の横断面はいずれも長方形であるので、教科書の式（4・13）を用い、最大曲げ応力はいずれの場合にも以下の式で求めることができる。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \frac{6M}{bh^2} \quad (1)$$

しかしながら、はりの場合には成立した単軸応力状態（教科書 4・1 節、仮定 2）が**板の場合には成り立たなくなる**ので、板の応力はこれだけでは十分と言えない。そこで、板の場合の応力と変形の要点について話しておこう。詳しくは板の曲げを扱う参考書を読まれるとよいであろう。

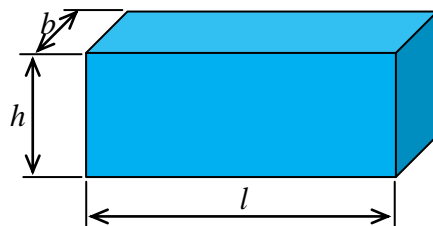


図 1

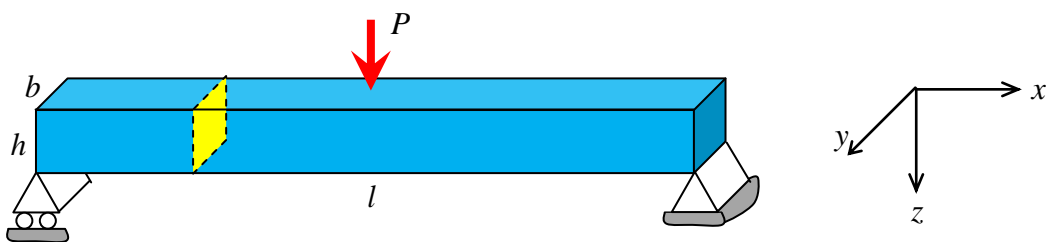


図 2

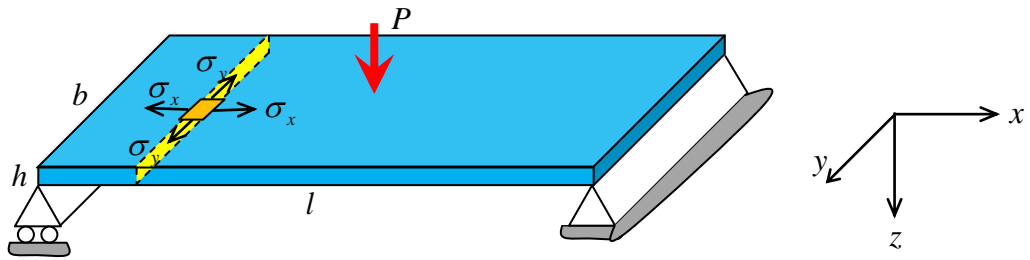


図 3

教科書、式(4・13)などの**はりに関する基礎式はいくつかの仮定の下に導かれている**。例えば、はりを繊維状の物体の束として仮定し、はりは単軸応力状態、すなわち図 2 において y 軸や z 軸方向の垂直応力は存在せず、 x 軸方向の垂直応力だけが存在するものと仮定した。実際、図 2 のような形状の場合、支点や荷重点近くを除き、この条件が満たされることを第 40 話で示した。

しかしながら、はりが x 軸方向に圧縮される部分ではポアソン比の影響で y 軸や z 軸方向に膨らみ、また伸びる部分では y 軸や z 軸方向に縮む。したがって実際のはりの断面形状は教科書、図 4・1(d)に示したように、変形前に長方形断面であったものが台形状に変化することになる（実際の変形は微小であり、目視できるほどではない）。この変化が周りの状態に影響されることなく、自由に行われるのであれば y 軸や z 軸方向の応力は生じない。しかし、板のように薄くなると、引張り側と圧縮側が近く、お互いに影響しあい、自由には変形ができなくなる。その影響によって図 3 に示すように曲げ応力 σ_x のほかに、 y 軸方向の応力 σ_y が生ずることになる。

なお、板の曲げに関してはより詳しく材料力学の問題を扱っている参考書（例えば、「材料力学」下巻、裳華房、鶴戸口、川田、倉西共著）に譲るが、図 3 のように支えられた板に外力が作用し、曲げモーメントが生ずる場合において、 y 軸方向の伸縮が全くない状態における、板の上下表面での x 軸、 y 軸方向の垂直応力は以下の式から求められる。

$$\sigma_x = \pm \frac{M}{Z} = \pm \frac{6}{bh^2} M \quad (2)$$

$$\sigma_y = \pm \frac{M}{Z} = \pm \nu \frac{6}{bh^2} M \quad (3)$$

ここで、 ν はポアソン比であり、図 3 の黄色断面部における曲げモーメントを M 、断面係数を $Z = bh^2 / 6$ とする。ポアソン比は通常 0.3 程度であるので、曲げ応力 σ_x の約 3 分の 1 程度の応力 σ_y が生ずることになる。

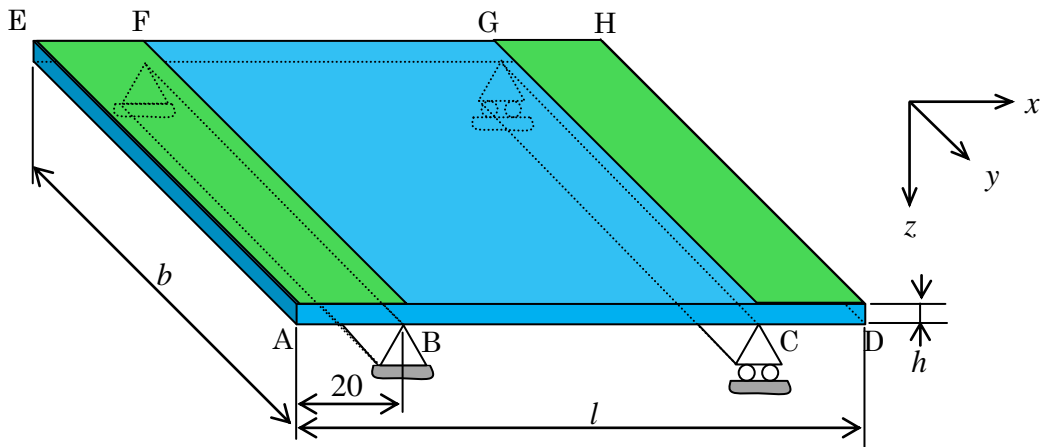


図 4

しかしながら、板が曲がる場合、 y 軸方向に伸縮が全くない状態は実際の場合には少なく、応力状態も幅方向に変化し、上記の式そのままでは必ずしも実際の状況を正しく示しているとは言えない場合も生ずる。以下に有限要素法により解析した板の応力や変形状態の例を示して置く。実際に遭遇した場合の参考にしてもらいたい。

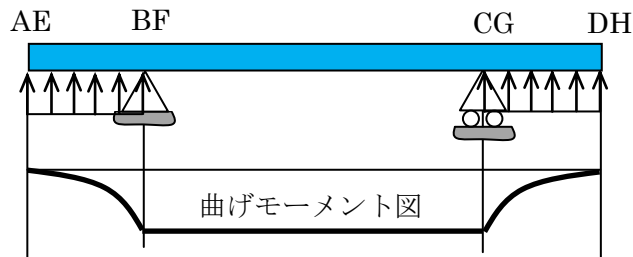


図 5

ここでは図 4 のような幅 $b = 100 \text{ mm}$ 、長さ $l = 100 \text{ mm}$ 、厚さ $h = 5 \text{ mm}$ の板の両端からそれぞれ 20 mm の位置 BF および CG にて単純支持した板を考える。この板の緑色で示した外側部分 ABFE および CDHG 部分の下側から面圧として 5.0 N/mm^2 を作用させ、板中央部分 BCGF 部分が下向き凸に変形するような状態で解析する。この状態では左右の支点外側にはそれぞれ総量で 10 kN (面圧 \times 作用面積) の力が作用することになる。

図 5 は図 4 を BF 方向に見た場合であり、板の中央部分 BCGF は一様な曲げモーメント状態となり、その大きさは $10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}$ である。したがって、板の上下の表面に生ずる応力 σ_x 、 σ_y は板の曲げの基礎式 (式(2),(3)) から、式(4),(5)に示すような、BCGF 面の上面あるいは下面の全面において一様な値となる。

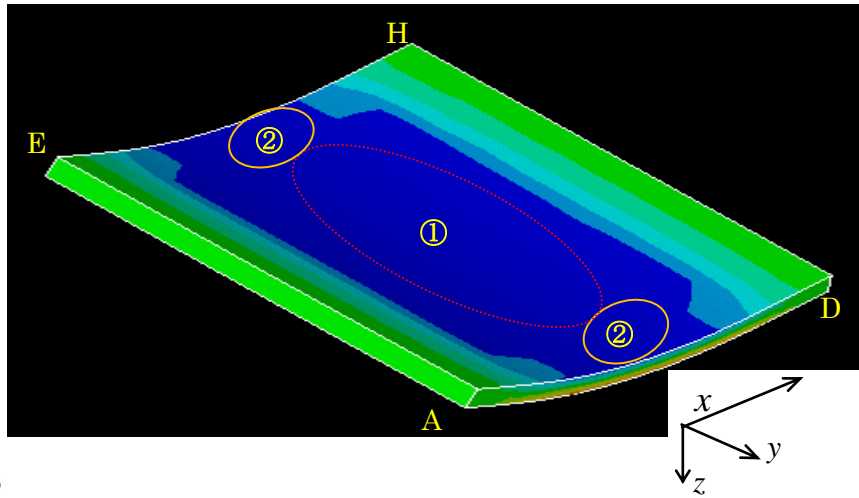


図 6

$$\sigma_x = \mp \frac{6}{bh^2} M = \mp \frac{6}{100 \times 5^2} \times 100000 = \mp 240 \text{ MPa} \quad (4)$$

$$\sigma_y = \mp \frac{6}{bh^2} M = \mp 0.3 \times \frac{6}{100 \times 5^2} \times 100000 = \mp 72 \text{ MPa} \quad (5)$$

なお、上側表面側が圧縮応力、下表面側が引張応力となる。また、ポアソン比 ν は0.3としている。

これに対して、図 6 はこの板の σ_x の応力分布を有限要素法解析により求めたものである。青色は圧縮応力が高い状態を示しており、板上面の中央部分①は支点間のほぼ全範囲において青色であり、式(4)から求めた結果と同様に応力分布がこの範囲では一様となることがわかる。その値は約 -237MPa であった。これに対して板幅の両端部近く、②ではこれより圧縮応力は増加し、両端面では約 -250MPa となる。したがって、板幅全体の平均応力は式(4)の結果である -240MPa に近い値となるが、板幅の端部と中央部では応力が異なり、板の曲げの基礎式を鵜呑みにはできないことが分かる。このことは σ_y に対しても同じであり、図 7 のように、中央部分①では -70MPa であるが、端の部分②に近づくに従い絶対値は減少し、端部では零となる。そのため式(5)の結果である -72MPa と等しくなるところはない。

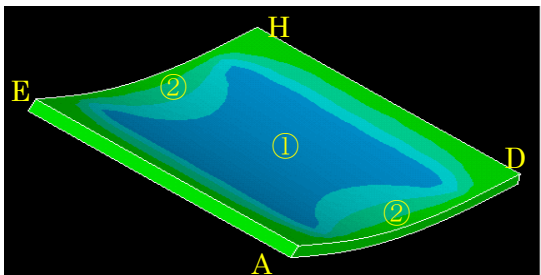


図 7

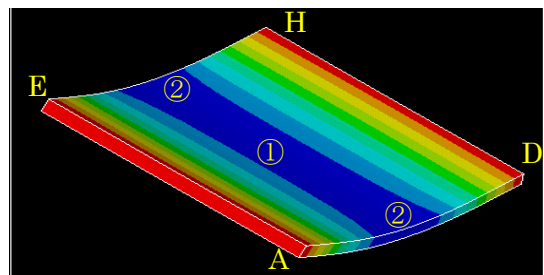


図 8

図 8 は z 軸方向へのたわみの状態を色で表示したものであり、中央部分①よりも端②の部分の方がより多くたわんでいることが青色の広がりからわかる（濃い青色ほど下方向にたわみ、赤色は上方向にたわむ部分を示している）。すなわち、有限な板を曲げた場合には x 軸方向に曲面となると同時に y 軸方向にも曲面を示し、ちょうど馬の鞍形のように変形する。均等に力を作用させても円筒形には曲がらないのである。これは第 13 話の図 4(a)のように、角型のゴム棒を曲げたときの状態と同じである。

図 9 は、解析モデルの形状は同じであるが、 y 軸方向のひずみが零となるように、図 4 に示した板の側面 AD 部分、EH 部分の y 軸方向変位を拘束して解析した場合である。この場合は板の曲げの基礎式を求める条件と同じであり、有限要素法解析による σ_x 、 σ_y の値も式(4),(5)に示した値と一致する。また、図 6 の条件で板の厚さ h だけを 2mm、20mm に変えて有限要素法により解析しても理論値と一致した値が得られた。

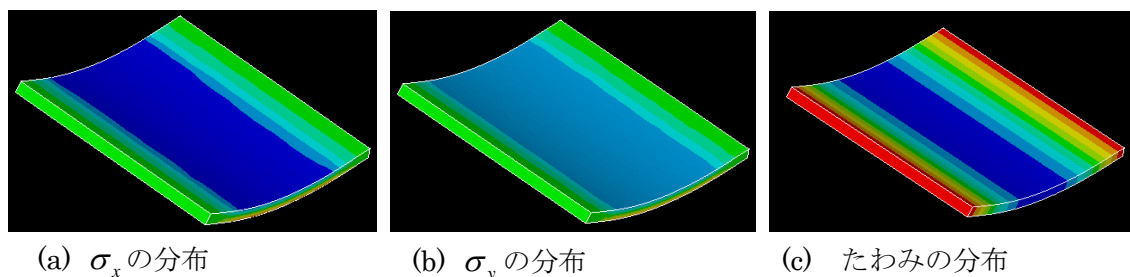


図 9

以上のように板の曲げははりの曲げと異なることが理解できるが、それとともに有限板の曲げにおける応力状態は板の曲げの基礎式から得られる結果をそのまま鵜呑みにすると状況によっては問題が生ずることがあることもわかる。