

第 44 話 支持モーメント、大きくなるのはどれ 続編

2009 年 9 月 24 日 作成

萩原芳彦

単純支持ばりの場合とは異なり、不静定ばりである固定ばりの場合には、はりの断面形状が全長にわたって一様ではないとき、支持モーメントや曲げモーメントは断面形状が一様な場合とは異なることを第 43 話で示した。前話でははりの断面の変化が左右対称であったが、はりの断面変化が左右対称ではない場合にはどのようなようになるであろうか。一例として、図 1 のような固定ばりの場合を示しておこう。

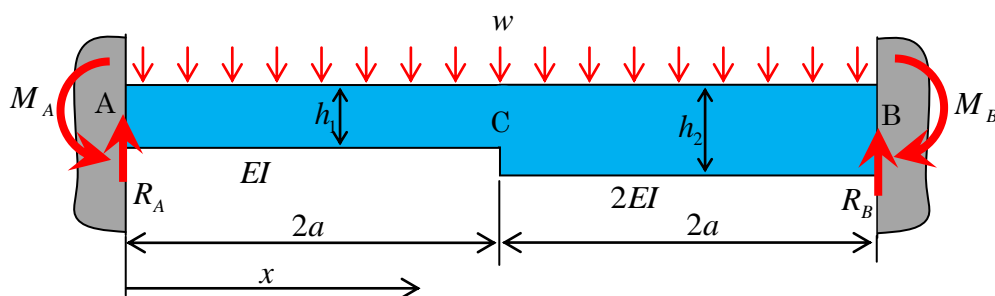


図 1

図 1 は、断面が長方形でありその形状は全長 $4a$ にわたり、幅 b が変化せず一定とし、高さははりの左半分で h_1 、右半分で h_2 となる両端固定ばりである。このはりに等分布荷重 w を作用させた場合、両端の支点における反力や支持モーメントがどのようなになるかを求めよう。なお、以下の計算では簡単のために材質は一律とし、はり右側半分の断面 2 次モーメント I_2 は左半分の断面 2 次モーメント I_1 の 2 倍 ($I_2 = 2I_1$ 、 $h_2^3 = 2h_1^3$) とする。すなわち、曲げ剛性は、左側半分が EI 、右半分が $2EI$ として説明する。なお、解法には前話と同じ、ひずみエネルギー法を用いる。

両支点 A、B の反力ならびに支持モーメントを図 1 の向きに R_A 、 R_B 、 M_A 、 M_B と仮定すれば、力ならびに力のモーメントのつり合い条件として、

$$R_A + R_B - 4wa = 0 \quad (\text{垂直方向の力のつり合い}) \quad (1)$$

$$M_A - M_B + 4aR_B - 8a^2w = 0 \quad (\text{A 点周りの力のモーメントのつり合い}) \quad (2)$$

が得られる。

また、支点 A から x の距離におけるはりに生ずる曲げモーメント M_x は以下のように表わされる。

$$M_x = R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \quad (3)$$

したがって、このはりに蓄えられる弾性ひずみエネルギー U は、教科書、式(9・13)を用いて、

$$U = \int_0^{2a} \frac{1}{2EI} \left(R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right)^2 dx + \int_{2a}^{4a} \frac{1}{4EI} \left(R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right)^2 dx \quad (4)$$

となる。

ここで、**カスチリアノの定理** (教科書、式 (9・43)) を適用し、式(4)をAにおけるモーメント M_A で偏微分する。固定支点である支点Aにおけるたわみ角 i_A は零であることを考慮すれば、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} i_A &= \frac{\partial U}{\partial M_A} \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \left(R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right) (-1) dx + \frac{1}{2EI} \int_{2a}^{4a} \left(R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right) (-1) dx = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

この式を積分して整理すれば、以下のようになる。

$$5R_A a - 3M_A - 6wa^2 = 0 \quad (6)$$

また、式(4)をAにおける反力 R_A で偏微分すると、Aにおける垂直方向のたわみ v_A となり (教科書、式 (9・44))、Aにおけるたわみは零であるので、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{\partial U}{\partial R_A} \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^{2a} \left(R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right) x dx + \frac{1}{2EI} \int_{2a}^{4a} \left(R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right) x dx = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

この式を積分して整理すれば、以下のようになる。

$$12R_A a - 5M_A - 17wa^2 = 0 \quad (8)$$

式(6),(8)から、 R_A 、 M_A は以下のように求められる。

$$R_A = \frac{21}{11} wa, \quad M_A = \frac{13}{11} wa^2 \quad (9)$$

また、式(1),(2)から、 R_B 、 M_B も以下のように求められる。

$$R_B = \frac{23}{11} wa, \quad M_B = \frac{17}{11} wa^2 \quad (10)$$

したがって、支点 A から x における曲げモーメントは式(3)により、

$$M_x = \frac{21}{11} wax - \frac{13}{11} wa^2 - \frac{1}{2} wx^2 \quad (11)$$

となる。この式から曲げモーメントが極値をとるのは x が、

$$x = \frac{21}{11} a \quad (12)$$

のときであり、細いはりの部分で生じていることがわかる。そのときの曲げモーメントは、

$$M_x = \frac{155}{242} wa^2 \quad (13)$$

となる。この値は支点 A における曲げモーメント ($M_A = -\frac{13}{11} wa^2$) の絶対値より小さい

ため、はりで一番曲げ応力の高くなるのは、支点 A ということになる。

注：式(9)に示した M_A は支点の支持モーメントを示しており、図 1 に示した向きに支点からはりに作用している。一方、曲げモーメントはその定義からはりを下向き凸に変形させる場合を正としている。この場合には A における図の向きの支持モーメントの作用によってはりは上向き凸に曲がることになるので A における曲げモーメントは負の値となる。単なる力のモーメントとはりの曲げモーメントの定義の違いを間違えないようにすること。

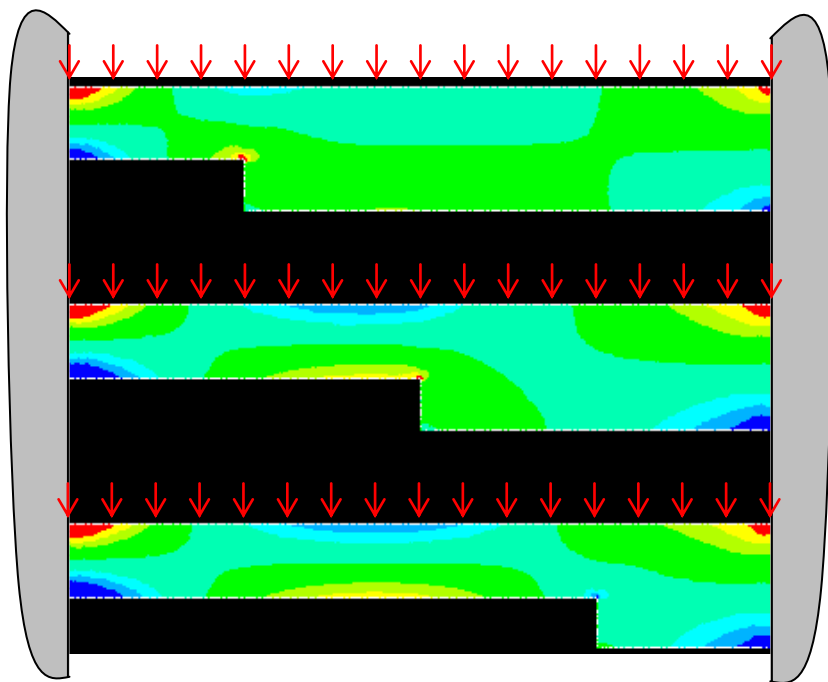


図 2

なお、支点 B における曲げモーメントの絶対値は支点 A より大きくなるが、右半分は断面係数が左半分よりも大きくなるので、曲げ応力は低くなる。その状況は断面形状の差の程度による。上記の条件の場合には A における曲げ応力は B における曲げ応力より大きくなる事が分かる。また、図 2 は前話と同じく全長が 500mm、はりの幅は全長にわたり一様に 30mm とし、はりの高さが左側を 50mm、右側を 85mm、等分布荷重を 60N/mm とした場合（曲げ剛性が右側半分は左側半分の約 5 倍）の有限要素法による解析結果を可視化したものである。図 2 では形状変化が中央部としたもののほかに、左 4 分の 1、右 4 分の 1 において形状が変化した場合の解析結果も示してある。なお、応力ははりの軸方向の垂直応力であり、赤色部分が一番高い応力（引張応力）、青色部分が一番低い応力（圧縮応力）状態を示している。

図 2 から左固定端 A の部分での赤色の広がり、右固定端 B の部分での広がりより大きく、A 部のほうが応力は高いことが分かる。さらに、はりの途中で曲げモーメントが極値をとるところにおける応力はさらに低くなることもわかる。なお、別の意味で注意が必要なのは形状が変わるところで応力集中のために高い応力が生ずることである。