

## 第 43 話 支持モーメント、大きくなるのはどれ

2009 年 7 月 16 日 作成

萩原芳彦

図 1 (a)のように等分布荷重  $w$  を受ける全長にわたり一様な断面形状である固定ばり AB の中央部分 DE を図(b),(c)のように細くしたり、太くしたりすると、両端 A,B における支持モーメントならびにはりに生ずる曲げモーメントはどのように変化するであろうか。

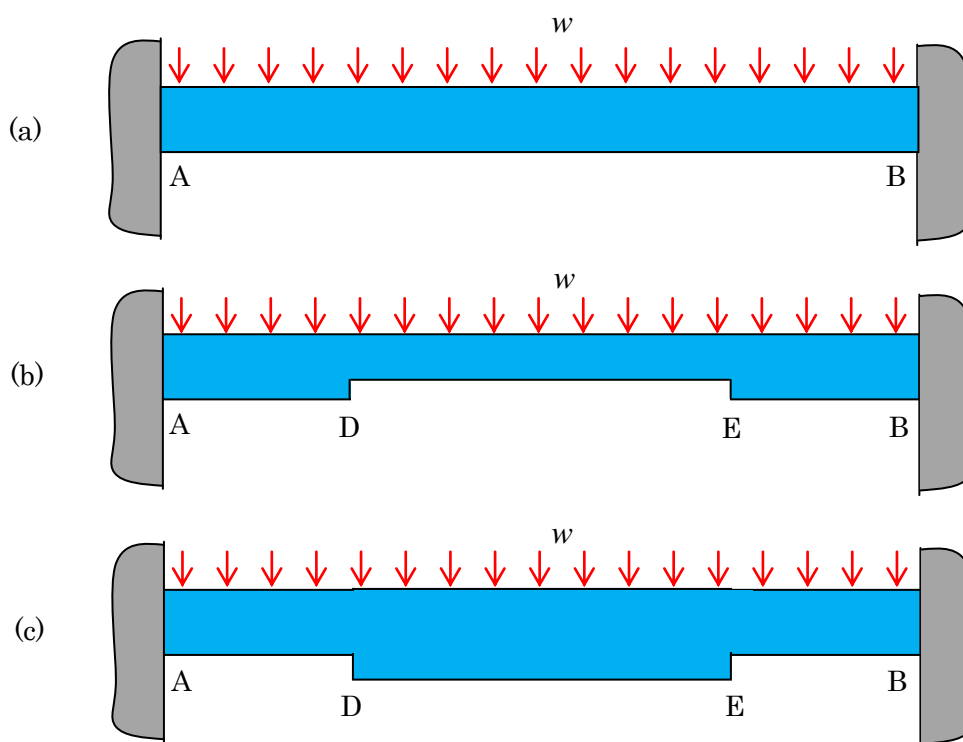


図 1

図 2 のように、**静定ばり**である単純支持ばりに等分布荷重が作用しているときのはりに生ずる曲げモーメントは、はりの断面形状が図 1(b),(c)のように、はりの途中で変化しても変わりはなく、はりの全長  $l$  や負荷荷重  $w$  のみによって決まる。すなわち、図 2 の場合における左端 A から  $x$  の場所におけるはりに生ずる曲げモーメント  $M_x$  は、例えば教科書 5 章の例題 2 に示すように、

$$M_x = \frac{1}{2} wx - \frac{1}{2} wx^2 = \frac{1}{2} w(lx - x^2) \quad (1)$$

となり、断面形状あるいは材質に関連するものは含まれていない。

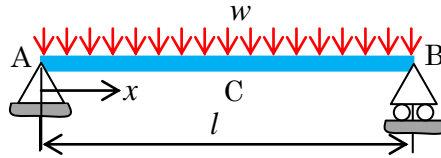


図 2

しかしながら、図 1 の固定ばりのように、**不静定ばり**の場合には支点における支持モーメントならびにはりに生ずる曲げモーメントは断面形状等に依存して変化するのである。そのことを固定ばりの断面形状が図 3 のように途中で変化する段付き固定ばりに等分布荷重  $w$  が作用しているときの固定端の支持モーメントや反力ならびにはりの各場所での曲げモーメントを求めることで説明しよう。簡単のため、両端近くのはりの断面 2 次モーメントを  $I_1$ 、中央部のそれを  $I_2$ 、はりの全長を  $4a$  とし、A から  $a$ 、 $3a$  のところで断面 2 次モーメントが変わる左右対称なはりとし、材質は全範囲にわたって同じであり、縦弾性係数を  $E$  とする。ここでは解法に**ひずみエネルギー法**（教科書 9 章参照）を用いて説明する。

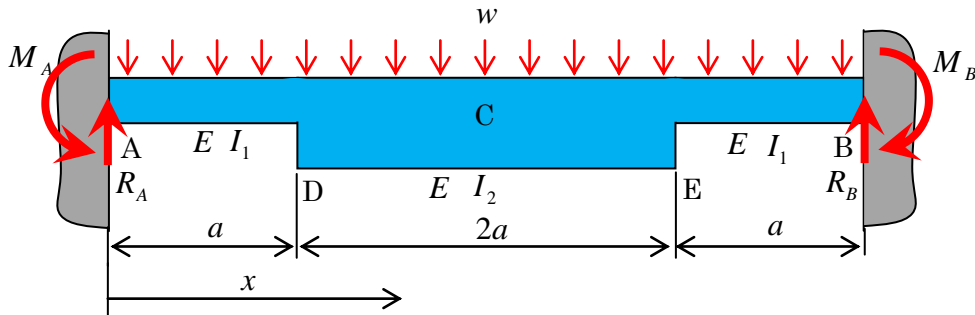


図 3

両支点 A、B の反力  $R_A$ 、 $R_B$ 、支持モーメント  $M_A$ 、 $M_B$  を図 3 の向きに仮定すれば、支点 A から  $x$  の距離における曲げモーメント  $M_x$  は以下のように表わされる。

$$M_x = R_A x - M_A - \frac{1}{2} w x^2 \quad (2)$$

したがって、このはりに蓄えられる弾性ひずみエネルギー  $U$  は、教科書、式(9・13)から、

$$U = \int_0^a \frac{1}{2EI_1} \left( R_A x - M_A - \frac{1}{2} w x^2 \right)^2 dx + \int_a^{3a} \frac{1}{2EI_2} \left( R_A x - M_A - \frac{1}{2} w x^2 \right)^2 dx + \int_{3a}^{4a} \frac{1}{2EI_1} \left( R_A x - M_A - \frac{1}{2} w x^2 \right)^2 dx \quad (3)$$

となる。

ここで、**カスチリアノの定理** (教科書、式(9・43)) を適用し、式(3)を A におけるモーメント  $M_A$  で偏微分する。固定支点である支点 A におけるたわみ角  $i_A$  は零であることを考慮すれば、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} i_A &= \frac{\partial U}{\partial M_A} \\ &= \frac{1}{EI_1} \int_0^a \left( R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right) (-1) dx + \frac{1}{EI_2} \int_a^{3a} \left( R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right) (-1) dx \\ &\quad + \frac{1}{EI_1} \int_{3a}^{4a} \left( R_A x - M_A - \frac{1}{2} wx^2 \right) (-1) dx = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

また、垂直方向の力のつり合い条件から、

$$R_A + R_B - 4wa = 0 \quad (5)$$

なる関係が得られる。さらに、この問題の場合、左右対称であるので、 $R_A$  と  $R_B$  は等しく、 $M_A$  と  $M_B$  も絶対値は等しくなることから、以下の結果が求められる。

$$R_A = R_B = 2wa \quad (6)$$

$$M_A = M_B \quad (7)$$

以上の関係を用い、式(4)を解くことにより  $M_A$ 、 $M_B$  は以下ようになる。

$$M_A = M_B = \frac{11I_1 + 5I_2}{6(I_1 + I_2)} wa^2 \quad (8)$$

ここで、 $I_2 = nI_1$  と置けば、式(8)は、

$$M_A = M_B = \frac{11 + 5n}{6(1 + n)} wa^2 \quad (9)$$

と表される。この式からわかるように、はりの断面 2 次モーメントの比  $n$  が変わると両端の支持モーメントも変わる。

例えば、 $I_2 = 0.5I_1$ 、 $I_2 = I_1$ 、 $I_2 = 2I_1$  の 3 種類の時の値を示すと、

$$I_2 = 0.5I_1 \text{ の時} \quad : \quad M_A = M_B = \frac{3}{2} wa^2 = 1.5wa^2 \quad (10)$$

$$I_2 = I_1 \text{ の時} \quad : \quad M_A = M_B = \frac{4}{3} wa^2 = 1.33wa^2 \quad (11)$$

$$I_2 = 2I_1 \text{ の時} \quad : \quad M_A = M_B = \frac{7}{6} wa^2 = 1.17wa^2 \quad (12)$$

となり、図 3 に示されているように、中央部分の断面 2 次モーメント  $I_2$  の方が両端部の断面 2 次モーメント  $I_1$  よりも大きい場合、両端 A、B における支持モーメントは小さくなる。このように、**不静定ばりの場合には断面形状の変化が支持モーメントに対して影響する**の

である。以上では材質は一樣としてあるが、材質が変化する場合にも同じような現象が生ずることは式(4)からわかるであろう。

また、はりに生ずる曲げモーメントの分布は、式(2)に式(6),(9)を代入すれば、

$$M_x = 2wax - \frac{11+5n}{6(1+n)} wa^2 - \frac{1}{2} wx^2 \quad (13)$$

と表せる。図4は式(13)で示す曲げモーメントの変化をより大きく見せるため、式(10)~(12)の場合とは異なり、 $n$ を0.2、1.0、5.0の3種類にとり、示したものである。なお、スパン  $4a = 500\text{mm}$ 、分布荷重  $w = 1.0\text{N/mm}$  とした場合である。

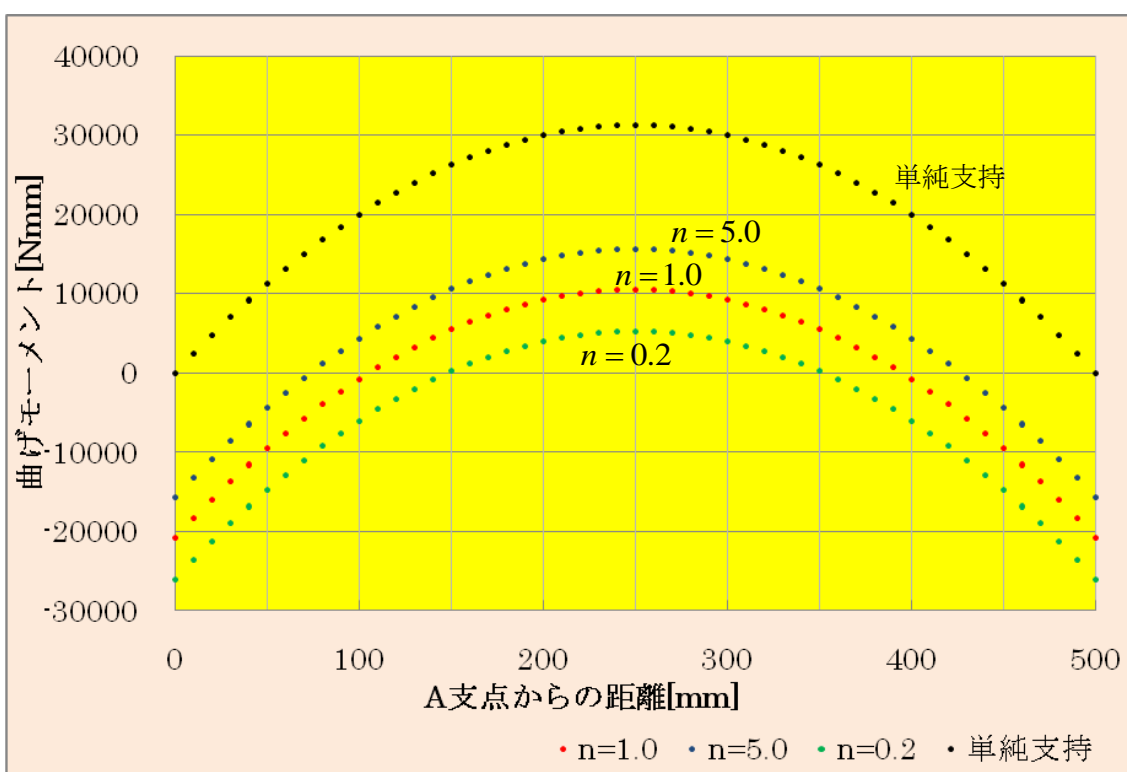


図4

図4からわかるように、曲げモーメントの分布の形は $n$ が変化しても変わらないが、その大きさは変化しており、一樣断面形状の場合 ( $n=1.0$ ) には曲げモーメントの絶対値が最大となるのは両支点A,Bであり、はり中央部Cにおける曲げモーメントの約2倍である。これに対して、 $n=5.0$ 程度にすれば、両支点A,Bとはりの中央Cとで曲げモーメントの絶対値はほぼ等しくなり、いずれも一樣な断面形状の場合の絶対値の最大値よりも小さな値となる。一方、図2に示した単純支持ばりの場合には断面形状が場所によって異なっても曲げモーメントは変わらず、はり中央Cにおいて最大値が生ずる。

以上のように、固定ばりの場合にははりの断面 2 次モーメントを場所により変えることで条件によってははりに生ずる支持モーメントや曲げモーメントを低く抑えることができる。ここでははりが 2 種類の断面形状を有し、はり全長の 4 分の 1 の位置で変えた場合について説明したもので、条件が異なる場合には式(9),(13)などは若干異なるものとなる。また、支持モーメントが小さくなる場合でも、**断面 2 次モーメントが小さくなれば一部の例外（第 36 話参照）を除き、曲げ応力は大きくなる**。さらに、形状を変えることでたわみが大きくなれば、第 42 話で説明したことなども考慮して強度計算を行わなければならない。

図 5 は、段付きの両端固定ばりの応力状態を比較するため、有限要素法を用いて曲げ応力分布を解析した結果である。図 5(a)は第 41、42 話において解析したのと同じ、断面が幅  $b = 30 \text{ mm}$ 、高さ  $h = 50 \text{ mm}$  の長方形であり、スパンが  $l = 500 \text{ mm}$  のはりの解析結果である。図 5(b),(c)は、幅  $b$  は変えずに、はりの中央部の高さ  $h$  をそれぞれ  $30 \text{ mm}$ 、 $85 \text{ mm}$  に変えた段付き固定ばりの解析結果である。高さが  $30 \text{ mm}$ 、 $50 \text{ mm}$ 、 $85 \text{ mm}$  と異なり、幅が同じである場合、断面 2 次モーメントの比  $n$  はおおむね 5 倍ずつ変化し、ほぼ図 4 の変化と同じ状況にある。なお、荷重ははりの全長に等分布荷重  $w = 60 \text{ N/mm}$  を作用させている。

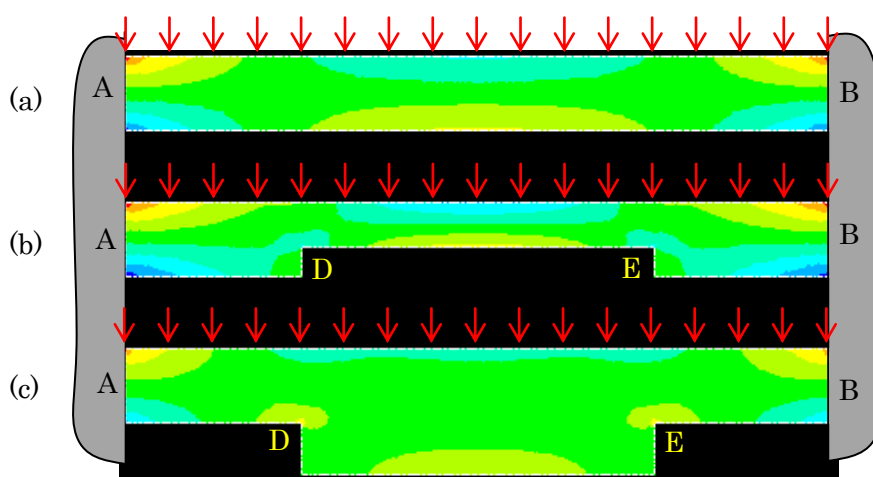


図 5

図 5 ははりの長手方向応力、すなわち曲げ応力の分布状態を示している。応力状態は赤色になるほどプラス側（引張り応力）に大きくなり、青色になるほどマイナス側（圧縮応力）に大きくなる状態を示している。また、緑の部分は応力が零に近いところを表している。断面形状が同じである左右の支点 A,B 近くの色の変化からわかるように、中央部分が太い場合（図(c)）には応力は最も低くなり、一様な断面、中央部が細い場合の順に赤色、あるいは青色部分の広がりが大きくなり、式(10)~(12)や図 4 に示した支点の支持モーメントやその近くの曲げモーメントの変化に対応して応力も増加している。なお、段の部分 D,E では第 7 話でも述べたように、応力集中の影響があり、別の意味で注意が必要である。