

## 第 41 話 はりの支持条件を変えると

2009 年 6 月 18 日 作成

萩原芳彦

図 1 (a),(b)は両端を支えたはりの図である。図(a)は左端 A が回転支持、右端 B が移動支持であり、図(b)は左右端ともに回転支持である。これらのはりに外力が作用すると、図(c),(d)のように曲る。このとき、図(c)の場合は B が移動支持であるので、曲った分だけ支点 B は左に移動し、はりの全長（たわみ曲線の長さ）は  $l$  のままであるが、支点間距離は  $l'$  のように短くなる。一方、図(d)の場合には左右の支点ともに移動できないので、支点間距離  $l$  は変わらないが、たわみ曲線の長さ（曲線）は元の長さ（直線）よりも増加することになる。すなわち、はりの全長は伸びる。

図(c)では外力  $P$  が図のようにはりの軸線に直角に作用していれば、B が移動支点であるので B 支点の水平反力は零であり、水平方向の力のつり合いから左端 A の回転支点の水平反力も零となる（外力  $P$  が斜め方向に作用すると、図に点線で示した反力  $R_{Ax}$  が生ずる）。一方、図(d)の場合には、支点 A,B をそのままの位置に保とうとして、左右の回転支点には図のような大きさ等しい逆向きの水平反力  $R_{Ax}$ 、 $R_{Bx}$  が生ずる。これらは、図(c)において移動した支点 B をスパン  $l$  である元の位置に戻そうとする力に対応しているものであり、外力  $P$  が図のようにはりに直角に作用していても生ずる。

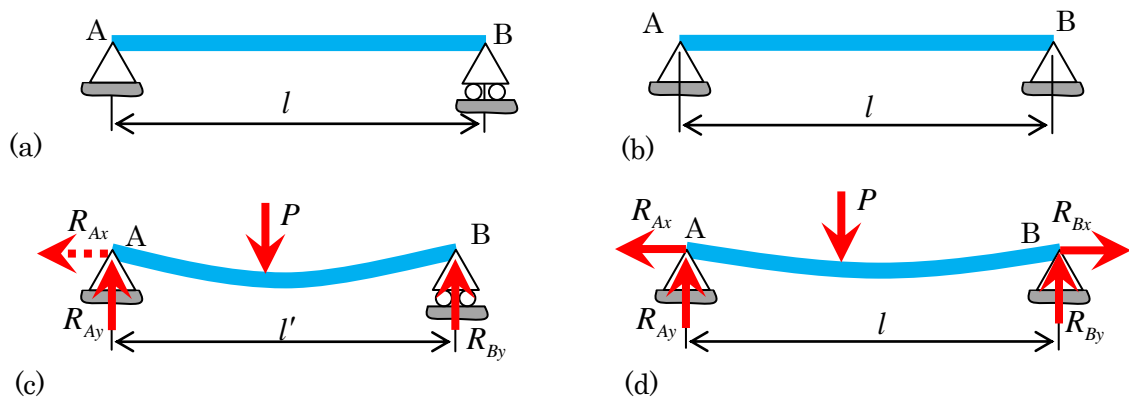


図 1

初等材料力学の教科書などで扱っている単純支持ばりは図(a),(c)の場合であり、この場合には水平、垂直反力  $R_{Ax}$ 、 $R_{Ay}$ 、 $R_{By}$  はつり合い条件から求められる **静定問題** である。これに対して、図(b),(d)の場合には支点反力の成分が  $R_{Ax}$ 、 $R_{Ay}$ 、 $R_{Bx}$ 、 $R_{By}$  の 4 つとなり、**不静定問題** となる。これらの反力はつり合い条件だけでは求めることができず、はりの変形条件も必要となり、その厳密な解を得るのは非常に厄介である。特にたわみ量が無視できない程度に大きくなる大変形問題では、教科書、式 (5・8) のたわみの微分方程式も成り立たなくなる。

しかしながら、実際のはりにおいては微小変形の状態で使用することが多く、結論を先に述べれば、両端回転支持である場合の図(d)に示した反力  $R_{Ax}$ 、 $R_{Bx}$  のはりに対する影響は少なく、図(c)の結果を図(d)の場合に適用しても強度設計上は多くの場合に問題が生じないのである。ここではそれがどの程度であるのかについて、簡単のためにたわみ曲線を一つの式で表せる、図 2 のような単純支持ばりに等分布荷重が作用している例で説明しよう。

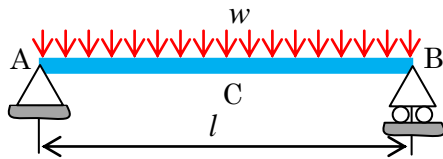


図 2

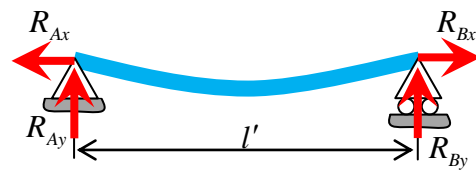


図 3

図 2 の場合のたわみ曲線の式は教科書、式(5・13)から、

$$v = \frac{w}{24EI} x(x^3 - 2lx^2 + l^3) \quad (1)$$

となる。この結果、図 3 のようにはりは直線から曲線となり、支点間距離  $l$  は  $l'$  に縮まるがはりの全長 (曲線) は  $l$  のままである。いま、両端が図 1(b),(d) のように回転支持の場合には支点間距離が  $l$  のまま変わらない状態で曲げられるため、はりの全長 (曲線) は  $l$  より長くなることになる。図 3 の場合にはおおむねその差 ( $\lambda = l - l'$ ) だけはりが伸びることになり、この伸びを生じさせているものが図 3 に示す水平力  $R_{Ax} (= R_{Bx})$  であると考えれば、これらの反力は以下のようにして求められる。

はりの軸方向力 (軸力)  $R_{Ax}$ 、 $R_{Bx} (= R_{Ax})$  と、はりの全長の伸び  $\lambda$  の間の関係は、教科書の式 (1・25) を基にして式(2)の前半のようになる。

$$R_{Ax} = R_{Bx} = \frac{\lambda}{l} EA = \frac{8}{3} \cdot \frac{\delta^2}{l^2} EA \quad (2)$$

ここで、 $\delta$  は図 2 のはりの最大たわみ量（中央 C におけるたわみ量）、 $E$  ははりの縦弾性係数、 $A$  ははりの断面積である。式(2)の後半の関係は鵜戸口他共著、材料力学(上)、裳華房、式(7・2)によるものであり、式(1)の曲線を円弧などに近似して  $\lambda$  と  $\delta$  の関係を  $\lambda = 8\delta^2 / 3l$  のように導いている。

式(2)からはりの軸方向の引張り応力  $\sigma_0$  は、

$$\sigma_0 = \frac{R_{Ax}}{A} = \frac{8\delta^2}{3l^2} E \quad (3)$$

となる。一方、はりの最大曲げ応力は  $\sigma_b = M / Z$  から求められるが、はりが微小たわみ状態であれば  $\delta$  は  $l$  に比べて十分小さく、 $\sigma_0$  は  $\sigma_b$  に比べて無視できる程度となり、軸方向力の影響は通常の場合には考えなくてよいと言える。すなわち、はりを微小たわみの状態で考える場合には両端ともに回転支持としても一方を移動支持にしてもその応力状態にはほとんど変わりがないと考えてよいのである。

以下に、具体的な例として図 4 の場合について計算をしてみよう。はりの断面は幅  $b = 30 \text{ mm}$ 、高さ  $h = 50 \text{ mm}$  の長方形であり、スパン  $l = 500 \text{ mm}$  の全長に等分布荷重  $w = 60 \text{ N/mm}$  を作用させている。なお、はりの縦弾性係数は、 $E = 206 \text{ GPa}$  とする。

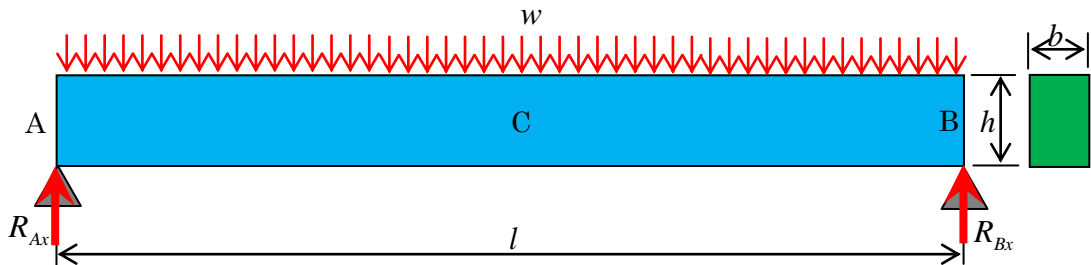


図 4

ここで、つり合い条件から、

$$R_{Ax} = R_{Bx} = \frac{wl}{2} \quad (4)$$

となり、はりの曲げモーメント  $M$  は以下ようになる。

$$M = R_{Ax}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{w}{2}(lx - x^2) \quad (5)$$

したがって、はりの中央 C において最大の曲げモーメント  $M_{\max}$  が生じ、

$$M_{\max} = \frac{wl^2}{8} \quad (6)$$

となる。このため、最大の曲げ応力  $\sigma_{\max}$  ははりの中央 C の下面において生じ、以下のようになる。

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{3wl^2}{4bh^2} = 150 \text{ MPa} \quad (7)$$

また、C におけるたわみ  $\delta_{\max}$  は、教科書 5 章例題 2 から、以下のようになる。

$$\delta_{\max} = \frac{5wl^4}{384EI} = 0.758 \text{ mm} \quad (8)$$

そのため、式(3)からこの場合の軸方向の引張り応力  $\sigma_0$  は、

$$\sigma_0 = 1.27 \text{ MPa} \quad (9)$$

となる。この値は、最大曲げ応力  $\sigma_{\max}$  の 0.8% であり、このようにはりのたわみが少ない場合には単純支持であっても両端ともに回転支持であっても最大応力にはほとんど差が生じないことがわかる。

しかしながら、たわみ量が大きくなると状況は大きく変わる。同じ断面形状のはりのスパンを  $l = 5000 \text{ mm}$  と、上記の 10 倍にとり、分布荷重を  $w = 0.6 \text{ N/mm}$  に下げ、最大の曲げ応力  $\sigma_{\max}$  が上述のスパン  $l = 500 \text{ mm}$  の場合とおなじ  $150 \text{ MPa}$  になるようにしたとき、最大たわみは  $\delta_{\max} = 75.9 \text{ mm}$  となる。この値はスパン  $l = 5000 \text{ mm}$  に対しては少ないように見えるが、式(3)によれば、 $\sigma_0 = 127 \text{ MPa}$  という大きな値となり、曲げ応力に対して無視できる量とはいえない状態となる。

**たわみ量が大きくなると、 $R_{Ax}$ 、 $R_{Bx}$  などの水平方向の力によりもたらされる曲げモーメントもはりには生ずるので、上記の結果をそのまま鵜呑みにするわけにはいかないが、軸力の影響を無視できないことは確かである。この点については次話においても取り上げる予定であるが、上記の支持条件の違いによる応力やたわみの違いの厳密な解析は、本ホームページの中の「関連するおすすめ書籍一覧」の、F. 「印象に残っている書籍」として示してある、西谷弘信著「材料力学」、コロナ社(1994)、p.61 に詳しく載っている。**