

第 40 話 はりを単軸応力問題としてよいわけ

2009 年 6 月 4 日 作成

萩原芳彦

教科書（よくわかる材料力学）、4 章において、**はり**は細い繊維の束から成り立っているものと仮定し、**単軸応力状態**の下で**曲げ応力の公式**を導いた。本当にそのような応力状態がはりの場合に成り立つのであろうか。有限要素法解析を用いて確認してみよう。

図 1 は有限要素法解析に用いたはりの形状であり、幅 $b = 30 \text{ mm}$ 、高さ $h = 50 \text{ mm}$ の長方形断面を有し、全長 $l = 300 \text{ mm}$ である。このはりの両端 A、D からそれぞれ $a = 20 \text{ mm}$ の位置で単純支持し、その外側上面（赤色部分）に $p = 500 \text{ N/mm}^2$ なる面圧を作用させる（注： p は面圧であり、教科書で示すようにはりの単位長さ当たりの等分布荷重 w で表わせば、この場合には幅 $b = 30 \text{ mm}$ の範囲に作用するので、 $w = 15 \text{ kN/mm}$ となる）。

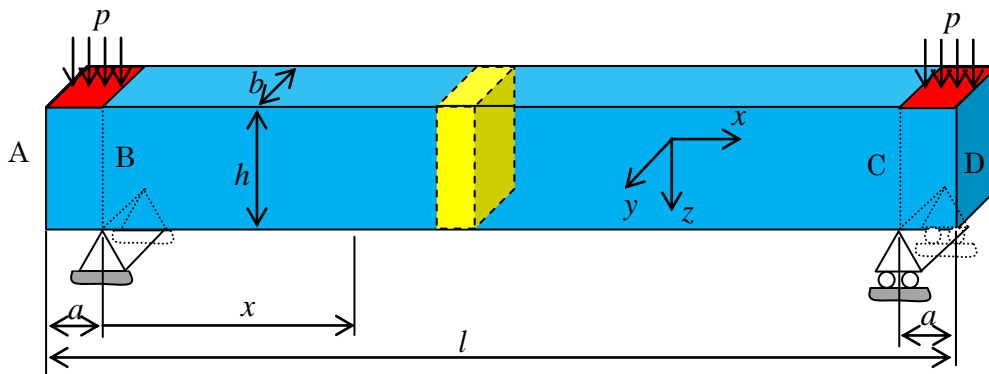


図 1

すなわち、この部分にはそれぞれ総和が $P = 300 \text{ kN}$ となる等分布力が作用している。このような荷重条件であるため、両支点 BC 間は図 2 に示す一様な曲げモーメントの分布となる。また、せん断力はこの範囲では零である。

この場合の最大曲げ応力 σ_{\max} を求めよう。AB あるいは CD 部分に作用する力の総和 P はそれぞれ、以下ようになる。

$$P = pA = 500 \times 30 \times 20 = 300000 \text{ N} = 300 \text{ kN} \quad (1)$$

ここで A は等分布力が作用している部分（図 1 の赤色部分）の面積である。

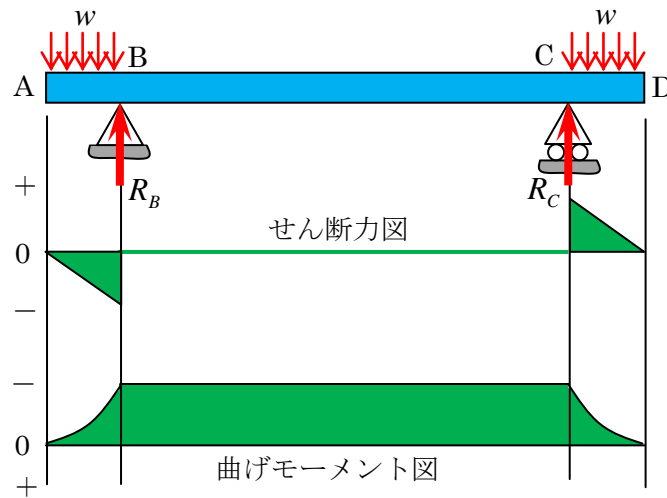


図 2

したがって、BC間の曲げモーメント M は、 x を B からの距離とすれば、

$$M = -P\left(\frac{a}{2} + x\right) + R_B x = -3000 \text{ kNmm} \quad (2)$$

となる。ここで、 R_B は力のつり合いから P と等しくなるので、曲げモーメントは式(2)のように B からの距離 x に関係なく BC 間では一定となる。そのため、BC 間の最大曲げ応力 σ_{\max} もはりの上面において BC 間で一定となり、教科書、式(4・13)から、その値は、

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \frac{6M}{bh^2} = 240 \text{ MPa} \quad (3)$$

となる。

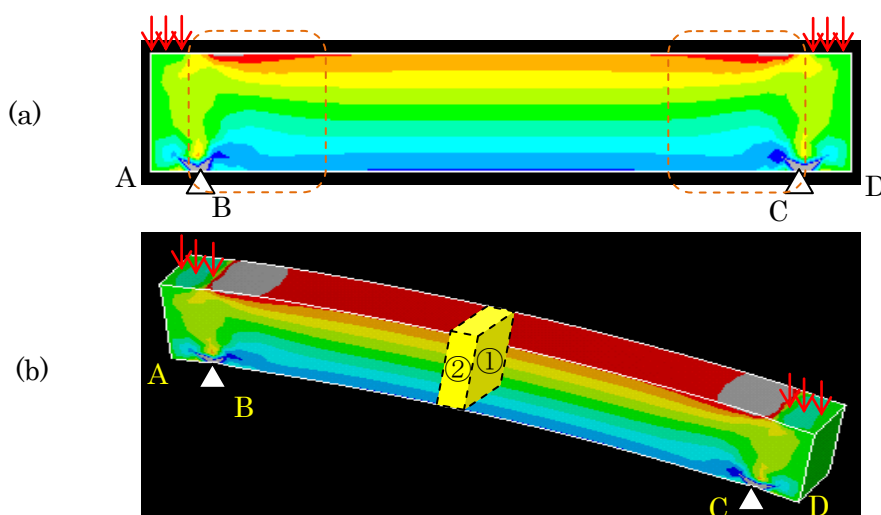


図 3

図 3 は有限要素法による解析結果であり、曲げ応力分布を色分けして示してある。赤色が応力の高い場所を示し、青色になるほど低い応力である。はりの側面から見た図 3(a)に示す解析結果のように、BC 間では左右の支点近傍（点線部分）を除き、ほぼ全域で上面の最大曲げ応力（引張応力）から下面の最小曲げ応力（圧縮応力）まで色の変化が支点 B からの距離 x が変わっても変わらず、同じ応力分布状態となっていることがわかる。

例えば、はりの上面での応力は点線の領域で 250MPa を超える値を示す（図(b)の灰色部分）が、BC 間のその他の場所では式(3)の値、240MPa とほぼ等しくなる。このように、材料力学のはりの公式から得られる結果は荷重点や支点近傍を除けば十分信頼できる値となるが、荷重点や支点近傍では注意を要することも確認できる。このはりの場合には、点線部分や AB および CD 部分に対しては教科書の式（4・13）などは正確な値を示すとは限らないのである。第 39 話でのごことあわせて考えるとよいであろう。

このような個所に対しては有限要素法解析を行うことが可能な環境であれば解析して解を得ることもよいが、実際問題では使用中の荷重の作用の仕方や支点の支持状態も微妙に変わり、設計時の条件を満たさない場合も起こりうる。そのため、材料力学の公式による値を基準にし、ある程度の安全率を設けることで十分信頼おける設計をすることも可能である。ただし、どのような場合にも**公式類はその導出条件や適用範囲を十分理解して使用することが重要である。**

図 4(a),(b),(c)は図 1 中に示したはりの x 軸、 y 軸、 z 軸方向の垂直応力 σ_x （曲げ応力）、 σ_y 、 σ_z の分布をそれぞれ示したものであり、これらの図においては同じ色は同じ応力状態を表している。色が灰色となっている部分は応力が赤色より高い、あるいは青色より低い部分である。この図からわかるように、 σ_y 、 σ_z は BC 間のほぼ全域で緑色を示している。緑色の部分の応力は図 4(a)に示す σ_x の分布においてははりの中央部分に現れるものであり、この色の部分では応力は零ないし零に近い値である。このことから、はりの支点や荷重点近傍以外では σ_x 以外の垂直応力（ y 軸、 z 軸方向の垂直応力）は零とみなしてよい状況であることが確認できる。**はりを実際に繊維の束とみなすことはできないが、力学的には教科書で説明したように、繊維の束と同じように、単軸応力状態と考えてよいのである。**

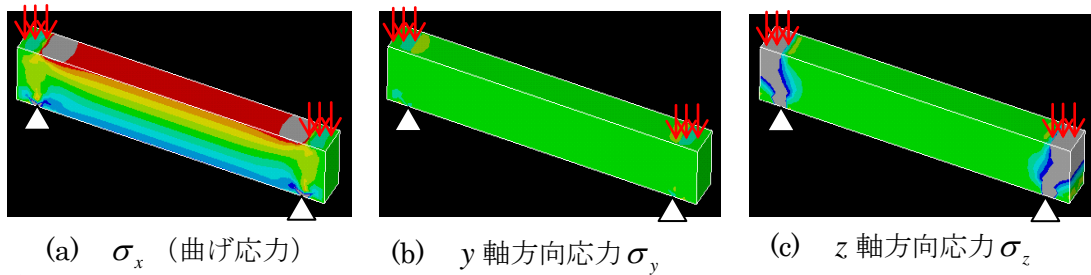


図 4

単軸応力状態では、 y 軸、 z 軸方向への変形が拘束されず、ポアソン比に応じて自由に变形できるが、はりの曲げの場合にもこの条件が満たされるため、冒頭に述べた仮定を導入して導いた式が実際に成り立つのである。図 5(a)は図 1 の中央に示した黄色の直方体部分の σ_x の解析結果を色で表している。図 5(b)はこの部分の変形を誇張して示したものであり、①の面が横断面、②の面がはりの側面を表しており、図 3(b)の中央部に示した黄色の部分に対応している。図からはややわかり難いが、図 5(a),(b)を比較すると、ポアソン比の影響で、例えば、変形後は ad が伸びるのに対応して ab は縮み、 eh が縮むのに対応して ef は伸びている。このように、 x 軸方向の変形に対してポアソン比に対応した変形が y 軸、 z 軸方向に自由にできる場合には y 軸、 z 軸方向の応力は生じないのである。

また、図 3(b)からわかるように、この部分においてはりは上向き凸に変形しているので、図 5(b)の稜線 ad は上向きに凸である。しかし、稜線 ab は下向きに凸に変形している。このことから面 $abcd$ は図(c)に誇張して示したように、鞍形に変形する。ここでは変形を誇張しているので鞍形がある程度わかるが、実際の変形は微小であり、目視は難しい。

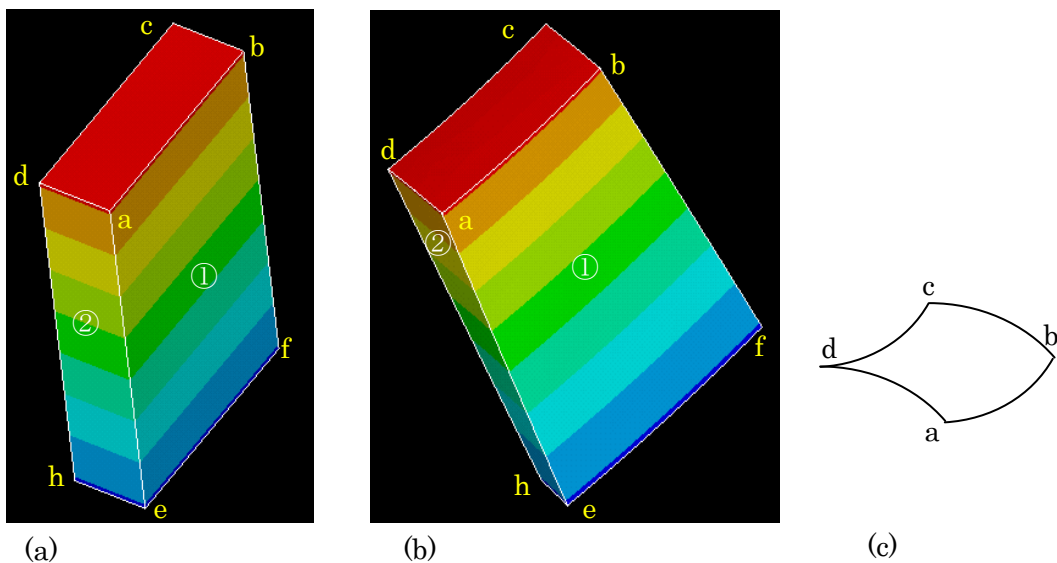


図 5

このほか、はりの曲げ応力の公式を誘導する際に設けた仮定である、横断面は変形後も平面を保つ（教科書 4 章の冒頭の仮定 1）ことも曲げモーメントのみが作用する断面では成り立つこと、せん断力が存在するところでは曲面となることなども有限要素法による解析結果によって確認できる。図 6 はその一例であり、図(a)は図 5(b)の②の面と同じ状況の解析例であり、ae、dh は直線となっている。しかし、図 1 の AB 間のようにせん断力の存在する場合には図(b)のように ij、kl はやや歪み、逆 S 字型の曲線となる。

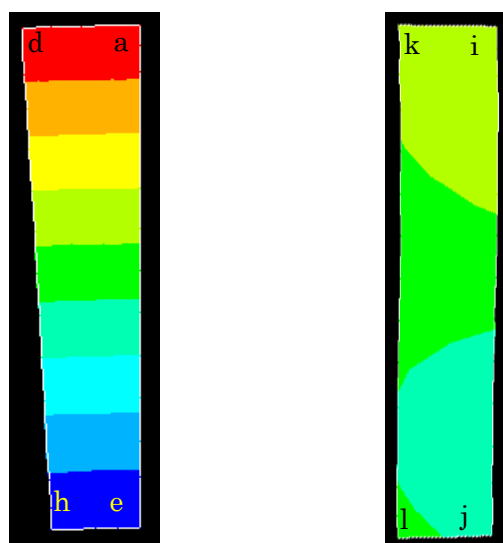


図 6

これらの解析結果は、**第 13 話**の図 4(a)のように、ゴムを曲げて確認することもできる。消しゴムなどで試して見るのもよいであろう。なお、**はりのように幅方向が高さ方向と同程度である場合にはこのようになるが、板の場合にはやや異なる**。そのことについては別の機会に話そう。