

## 第 37 話 丸太から最強の角材を製作するには

2009 年 4 月 23 日 作成

萩原芳彦

図 1 のような丸太（青色）から曲げに対して最強の角材（赤線）を切り出すにはどのようにすればよいか。

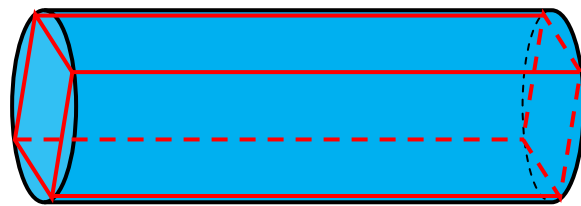


図 1

最強の意味は、はりの曲げの場合、2通り考えられる。それは、**使用時に生ずる応力を最も低く抑えられる状態にするか、変形を最もし難い状態にするか**の 2通りである。使用時の応力が低いほど破壊し難いことになり、変形がし難いほど一般には機能的に安心である。揺れるつり橋は強度として十分であっても渡り心地は良くないのはその一例である。また、動的な荷重を受けながら使用している場合には変形しやすい構造は共振を起こし易いであろう。図 2 は直径  $d$  の丸太の断面と、これから切り出す幅  $b$ 、高さ  $h$  の角材を示している。この図を参考にして 2通りの場合の寸法を求めると以下のようなになる。

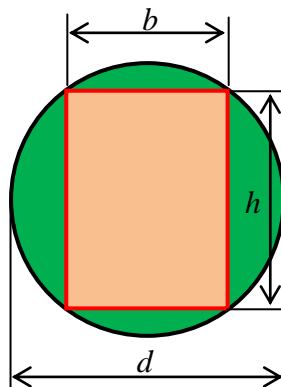


図 2

(a) 強度が強い角材の切り出し方

長方形断面のはりの最大曲げ応力  $\sigma_{\max}$  は、曲げモーメントを  $M$ 、断面係数を  $Z$  とすると、

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z} = \frac{6M}{bh^2} \quad (1)$$

から求められる。すなわち、曲げモーメントが同じ場合には断面係数  $Z = bh^2/6$  が最大となるときに曲げ応力は最小となる。丸太から角材を切り出す場合にはこの点に考慮すればよい。そこで、 $bh^2$  が最大となるときの  $b$ 、 $h$  を求める。

$d$ 、 $b$ 、 $h$ の間には

$$d^2 = b^2 + h^2 \quad (2)$$

の関係があるので、

$$Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(d^2 - b^2)}{6} \quad (3)$$

となる。ここで、断面係数  $Z$  が最大となるときの  $b$  を求めると、

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}d \quad (4)$$

となる。したがって、はりの高さ  $h$  は式(2)から、

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}d \quad (5)$$

となる。この寸法で丸太から角材を切り出せば曲げ応力を最も低く抑えたはりができる。

このときの断面 2 次モーメント  $I_a$  と断面係数  $Z_a$  は以下のようにになる。

$$I_a = \frac{\sqrt{2}}{54}d^4 = 0.0262d^4 \quad (6)$$

$$Z_a = \frac{\sqrt{3}}{27}d^3 = 0.0642d^3 \quad (7)$$

(b) 変形し難い角材の切り出し方

変形のし難さは断面 2 次モーメント  $I$  に依存する。例えば、教科書、式 (4・10) において  $I$  が大きい時にははりの曲率半径も大きくなり、このことは変形し難いことを示している。したがって、角材の断面 2 次モーメントが最大となるように寸法を決めれば変形を最も抑えることのできるはりとなる。

長方形断面の断面 2 次モーメント  $I$  は、

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12}b(d^2 - b^2)\sqrt{d^2 - b^2} \quad (8)$$

となる。したがって、 $I$ が最大となるときの $b$ 、 $h$ は以下のようになる。

$$b = \frac{d}{2} \quad (9)$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}d \quad (10)$$

このときの断面 2 次モーメント  $I_b$  と断面係数  $Z_b$  は以下のようになる。

$$I_b = \frac{\sqrt{3}}{64}d^4 = 0.0271d^4 \quad (12)$$

$$Z_b = \frac{1}{16}d^3 = 0.0625d^3 \quad (13)$$

元の丸太の断面 2 次モーメント  $I_o$ 、断面係数  $Z_o$  はそれぞれ、

$$I_o = \frac{\pi}{64}d^4 = 0.0491d^4 \quad (14)$$

$$Z_o = \frac{\pi}{32}d^3 = 0.0982d^3 \quad (15)$$

となり、上述の式を比較してもわかるように、丸太のままの方が断面 2 次モーメントも断面係数も高くなり、変形し難く、強度も高い状態を保つこともわかる。

なお、(a),(b)それぞれの場合の角材の断面積  $A_a$ 、 $A_b$ 、丸太の断面積  $A_o$  は、

$$A_a = \frac{\sqrt{2}}{3}d^2 = 0.471d^2$$

$$A_b = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = 0.433d^2$$

$$A_o = \frac{\pi}{4}d^2 = 0.785d^2$$

となり、柱として圧縮荷重を受ける場合には、断面積の大小が問題になるが、断面積は  $A_o$  が最も大きく、 $A_a$ 、 $A_b$  の順に小さくなる。

**丸太は丸太のまま使った方が変形に対しても強度に対しても抵抗は高いが、設計上長方形としなければならない場合には上記のようなことを考慮して形状を決めることになる。**このように、使い勝手と合わせて最適な形状を考えることが設計上必要である。例えば、使用条件によっては一部に丸みを残した図 3 のような、(a),(b)両条件を兼ね備えた形状が適しているかもしれない。また、第 36 話で示したように、丸太の高さ方向を若干削ればはりとしての強度は若干上昇することも覚えておくとよいであろう。

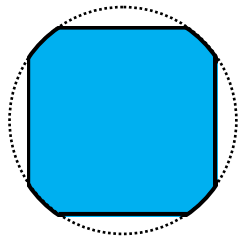


図 3

断面係数や断面 2 次モーメントが最大となるときの幅  $b$  は式(3)や(8)を  $b$  で微分し、極値を得ることで求められるが、表計算ソフトを用いてこれらの式をグラフ化すれば図 4 のようになり、断面係数や断面 2 次モーメントが最大となるときの幅  $b$  を図から読み取るとも表計算数値から求めることもできる。第 36 話でも示したように、微分が面倒な場合にはこのような方法で、設計上必要な十分信頼できる値を得ることができる。なお、図 4 の横軸は  $b/d$  を示しており、断面係数と断面 2 次モーメントの最大値をグラフ上でほぼ同じ高さに表示するため縦軸の数值は示していない。また、最大値近傍で若干  $b$  の値がずれても断面係数  $Z$  や断面 2 次モーメント  $I$  の値には急激な変化が生じないことも図からわかる。

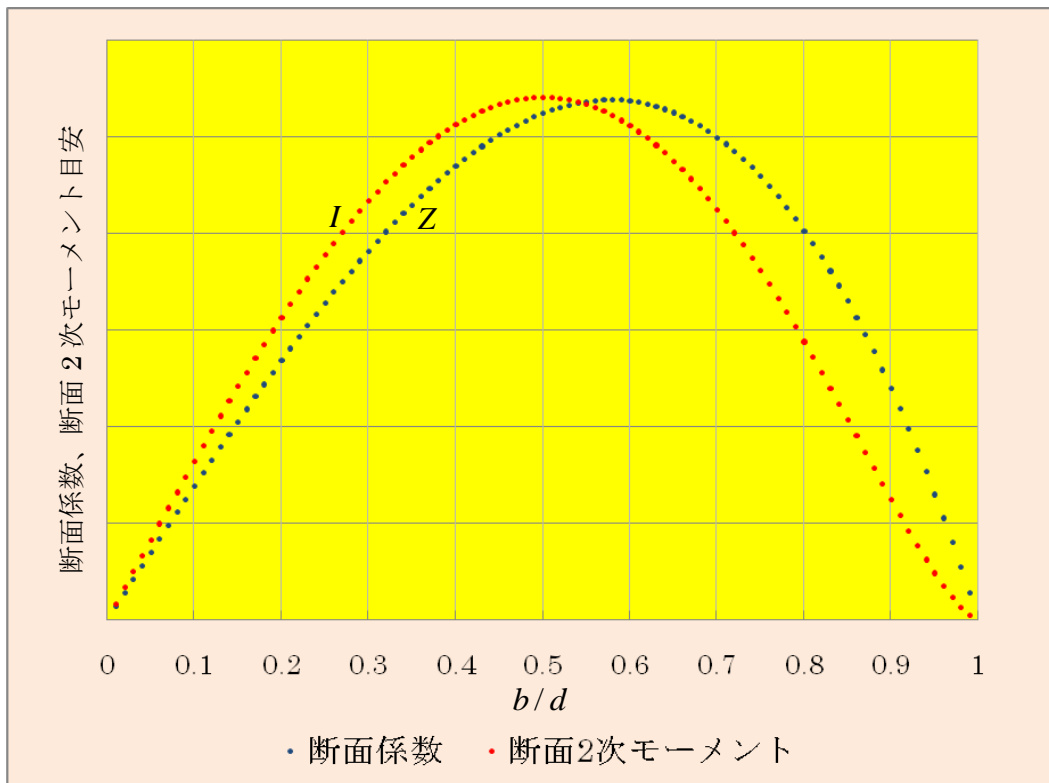


図 4