

第 36 話 はりの一部を削ると強度が増加する

2009 年 4 月 9 日 作成

萩原芳彦

図 1 は丸棒をはりとして使用する場合の模式図である。運動具の鉄棒などはその例であろう。丸棒であるから、その断面は図 2(a)のように円形である。この棒を図 1 のように下向きの荷重が作用する条件で使う場合、図 2(b)はやや誇張して描いてあるが、**上下の面の削り方が適切であれば、はりの強度がほんのわずかではあるが上昇することもあるのである**。以下にその計算と強度増加の程度を示しておこう。

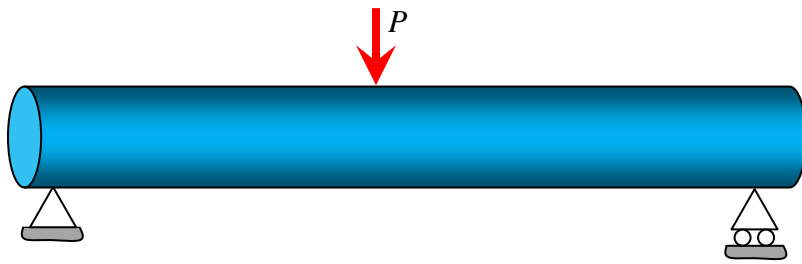


図 1

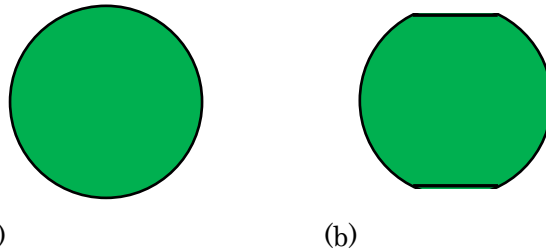


図 2

曲げモーメント M を生じているはりの断面における最大の曲げ応力 σ_{\max} は、断面 2 次モーメントを I 、断面係数を Z 、中立軸からはりの表面までの距離を e とすれば、教科書の式 (4・13) に示すように、

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} e = \frac{M}{Z} \quad (1)$$

と表わせる。このように、最大曲げ応力 σ_{\max} は断面係数 Z が大きいほど小さくなることから、断面係数 Z が最大となるように断面の形状寸法を決めれば強度の高いはり設計ができることになる。

そこで、図3のように直径 d （半径 r ）の円形断面の一部を削り取った場合の断面係数 Z を求めよう。 $x-y$ 座標の原点を円形断面の図心 O にとり、中立軸を x 軸とし、 x 軸から反時計ならびに時計回転に角度 θ_0 だけ回転した場所にて、その外側部分を図のように x 軸に平行に削りとった形状（薄い空色部分）について考えよう。上下を対称に削り取るので、削った後も断面の図心は変わらない。

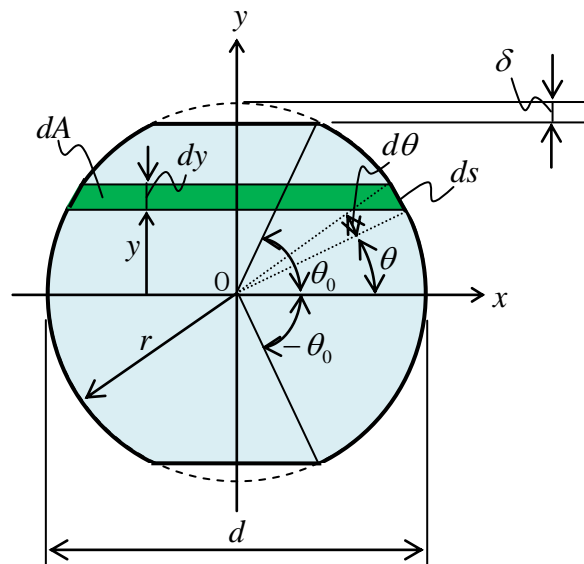


図3

いま、 x 軸の正方向から任意の角 θ だけ回転した位置における、微小角 $d\theta$ に対応した x 軸に平行な部分（緑色部分）の面積を dA 、その位置までの x 軸からの距離を y 、この微小部分の幅を dy とすれば、断面2次モーメントの定義式（教科書、式(4・9)）から、薄い空色部分の形状の x 軸（中立軸）に関する断面2次モーメント I は以下のようなになる。

$$I = \int_A y^2 dA = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} 2r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \quad (2)$$

上記の式の変形には以下の関係を用いる。図からわかるように、 $y = r \sin \theta$ であり、この式を微分すれば、 $dy = r \cos \theta d\theta$ なる関係が得られる。

また、 $dA = 2r \cos \theta \cdot dy = 2r \cos \theta \cdot r \cos \theta d\theta = 2r^2 \cos^2 \theta d\theta$ なる関係も求められる。

式(2)から断面2次モーメントは以下のようなになる。

$$\begin{aligned} I &= \int_A y^2 dA = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} 2r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{r^4}{4} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{r^4}{8} (4\theta_0 - \sin 4\theta_0) \end{aligned} \quad (3)$$

式の変形には三角関数の倍角の公式を用いる。この式において、 $\theta_0 = \pi/2$ の場合は円形断面となり、円形断面の断面2次モーメント、 $I_0 = \pi d^4 / 64$ が得られる。

したがって、断面係数 Z は、

$$Z = \frac{I}{r \sin \theta_0} = \frac{r^3}{8} \cdot \frac{4\theta_0 - \sin 4\theta_0}{\sin \theta_0} \quad (4)$$

となる。ここで、断面係数 Z が最大となるときの θ_0 を求めれば、強度を最も高く保つ断面形状が得られる。式(4)を θ_0 で微分すれば、

$$Z' = \frac{r^3}{8} \cdot \frac{(4 - 4\cos 4\theta_0)\sin \theta_0 - (4\theta_0 - \sin 4\theta_0)\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} \quad (5)$$

となり、この値が零となるときの θ_0 から、最適な削り量が求められる。

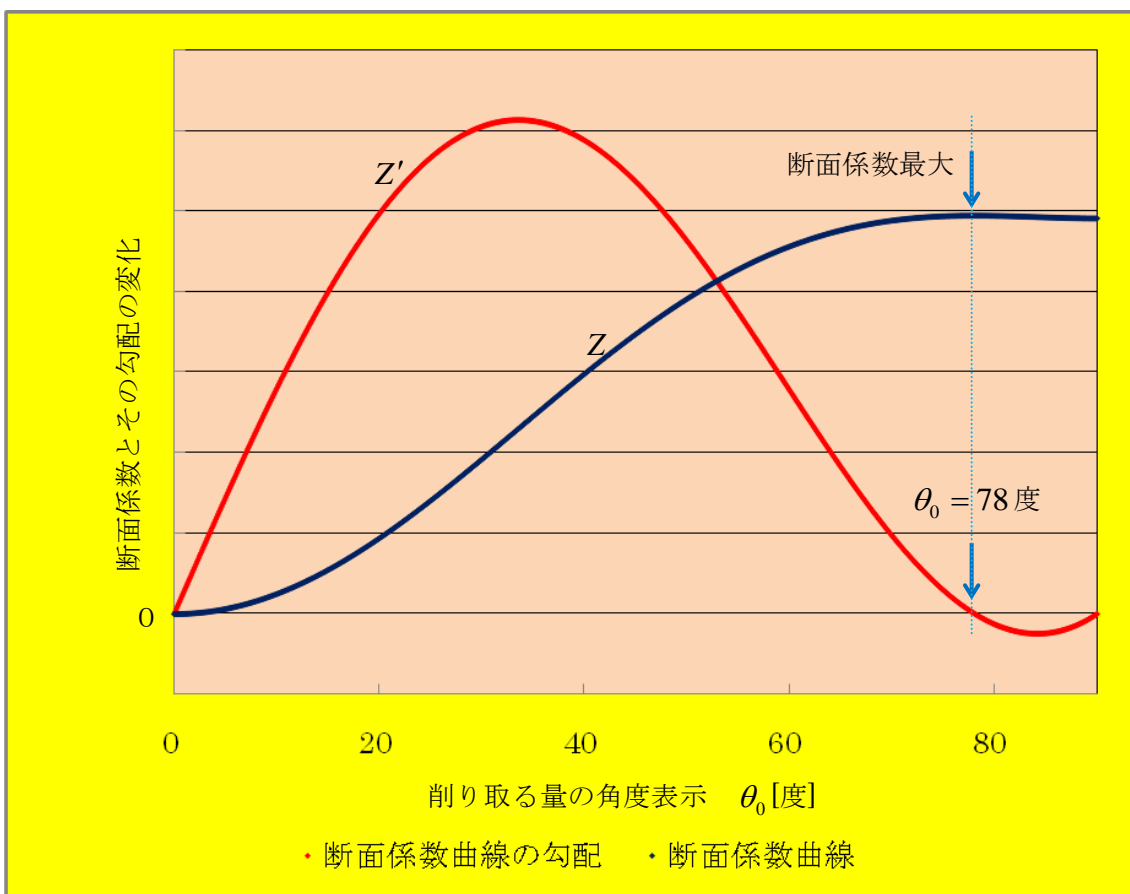


図 4

図 4 は式(4),(5)の曲線を表計算ソフト Excel で描いたものである。横軸は θ_0 、縦軸は Z および Z' を表している。なお、この図の計算は円形断面の直径を 10mm として行ったが、あくまでも目安であり、縦軸については零点以外の数値は示していない。この図からわかるように、 θ_0 が約 78 度のときに Z' は零となっており、図ではややわかり難いが、このとき断面係数 Z は最大値を示しており、円形断面すなわち $\theta_0 = 90^\circ$ の時よりも断面係数は大きいこともわかる。このように、表計算ソフトを利用することで、面倒な式の厳密解が得ら

れなくとも充分利用可能な数値計算結果が得られる。

求められた数値計算結果から、最大の断面係数 Z_{\max} となるときの図 3 に示した削り量 δ は以下ようになる。

$$\delta = r(1 - \sin \theta_0) \approx 0.022r \quad (6)$$

また、断面係数は円形断面のままの場合の断面係数 Z_0 に対して、

$$\frac{Z_{\max}}{Z_0} = 1.0069 \quad (7)$$

となる。増加割合は 1%未満ではあるが、その分、最大の曲げ応力は減少することになる。

以上のように、円形断面棒の場合には削り取ることによる強度上昇はあまりないが、教科書、「よくわかる材料力学」の演習問題 4・2 に示した角材の場合には、最適に削り取れば断面係数は 1.053 倍に上昇する。5.3%の強度上昇（あるいは実際の応力の低下）は第 22 話において述べたように疲労寿命ではかなりの改善となり、検討に値するであろう。ただし、冒頭に述べた遊具としての鉄棒の場合には力は使用中に色々な方向に作用することになるので一部を削り取ったら危険であるし、遊具としての価値もなくなる。

以上に述べた強度上昇は、**はりの強度がはりの高さに関する e と断面 2 次モーメント I の 2 つからなる断面係数 Z に依存することによっている。** これに対して、**はりの一部を削り取ること**で、**断面 2 次モーメント I は減少し、はりはたわみ易くなる。** これは、はりの変形し難さが縦弾性係数 E と断面 2 次モーメント I に依存するからであり、教科書の式 (4・10) から理解できる。強度が上昇してもたわみ易くなれば機能上の問題が生ずることもある。設計時に注意する点である。