

第 34 話 分布力に対するカスチリアノの定理の適用法

2009 年 1 月 8 日 作成

萩原芳彦

カスチリアノの定理は、式(1)に示すように、物体に蓄えられる弾性ひずみエネルギー U をある点に作用する力 P_i で偏微分するとその点の力の作用方向変位 δ_i が求められるというものである。図 1 のように等分布力 w が作用している場合にはどのようにすればよいであろうか。

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (1)$$

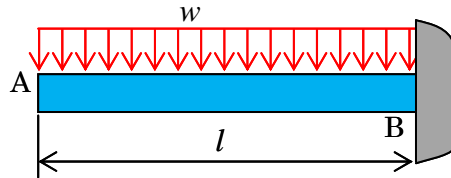


図 1

等分布力 w ははりの単位長さ当たりに作用している力であり、カスチリアノの定理で偏微分する力のように一点に作用する力として考えると、点の長さ（幅）は零であるので、零の力ということになり、式(1)の微分はできない。そこで、図 2 のように仮想的に力を作らせ、問題を解く方法がとられる。

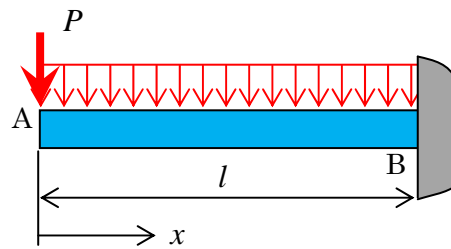


図 2

図 2 の場合、自由端から x における曲げモーメントは、

$$M = -\frac{1}{2}wx^2 - Px \quad (2)$$

となるので、このはりに蓄えられる弾性ひずみエネルギーは、

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{1}{2EI} \left(-\frac{1}{2}wx^2 - Px \right)^2 dx \quad (3)$$

となる（教科書、式(9・13)）。

したがって、自由端 A におけるたわみ δ_A は、カスチリアノの定理から、

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} wx^2 + Px \right) x dx \quad (4)$$

となるが、ここで、図 1 の場合には力 P は作用していないので、零と置けば、

$$\delta_A = \frac{wl^4}{8EI} \quad (5)$$

が求められる。この式は教科書、式 (5・24) より得られるものと一致する。

なお、第 33 話、式(8)、

$$\delta_i = \int_0^l \frac{MM'_w}{EI} dx \quad (6)$$

を用いれば、 P が単位荷重の場合、すなわち $P=1$ のときの曲げモーメント M'_p は、 $M'_p = -x$ であるので、

$$\delta_A = \int_0^l \frac{MM'_p}{EI} dx = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(\frac{-wx^2}{2} \right) (-x) dx = \frac{wl^4}{8EI} \quad (7)$$

のようにしても求められる。

なお、はりのたわみ曲線を求めたい場合には図 3 のように、自由端から任意の距離 c の C 点に力 P を作用させ、同様の手順をとることで c の変数として求めることができる。この場合、式(2)、(3)に用いる曲げモーメントの式は AC 間、CB 間で同一式ではなく、積分範囲を 2 分することになるが、AC 間の式には力 P が含まれないので、偏微分すると零となるので、この場合には考えないでよいことになる。

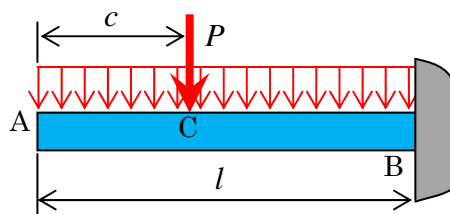


図 3