

第 33 話 カスチリアノの定理を使ってたわみ角を求める

2009 年 12 月 18 日 作成

萩原芳彦

第 32 話においてカスチリアノの定理を用いてはりのたわみ量を求めたが、ここではたわみ角の求め方を説明しよう。前話と同様に図 1 の片持ばりに集中力が作用した場合を考えよう。縦弾性係数を E 、断面 2 次モーメントを I とする。

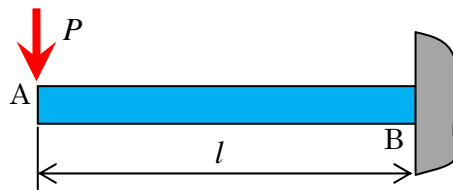


図 1

カスチリアノの定理は前話に示したように、物体に蓄えられている弾性ひずみエネルギー U をある場所に作用する力 P_i で微分したものは、式(1)のように、その力の作用方向の変位 λ_i に等しくなるというものである。

$$\lambda_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (1)$$

この関係を発展させると、物体に蓄えられる弾性ひずみエネルギー U 、物体を回転させようとする力の働きである力のモーメント M_i 、物体の回転量を表す回転角 θ_i の間に以下の関係が導かれる。すなわち、**物体に蓄えられている弾性ひずみエネルギー U をある場所に作用する力のモーメント M_i で偏微分したものは、式(2)のように、その力のモーメントの作用回転方向の回転角 θ_i に等しくなるというものである。**

$$\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i} \quad (2)$$

この回転角 θ_i は、はりの場合にはたわみ角 i_i に相当するので、次のようにしてたわみ角を求めることができる。図 2 は図 1 のはりの自由端 A に集中力 P のほかに偶力 M_0 を作用させている。このような場合に、はりに蓄えられる曲げによる弾性ひずみエネルギー U は、自由端から x におけるはりに生ずる曲げモーメント M が

$$M = -Px + M_0 \quad (3)$$

となるので、

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{(-Px + M_0)^2}{2EI} dx \quad (4)$$

となる。

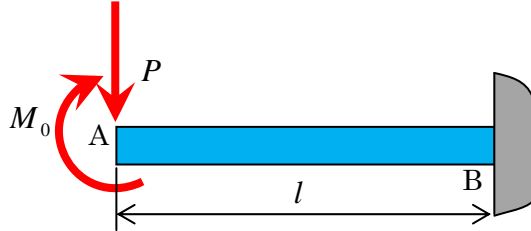


図 2

したがって、自由端 A におけるたわみ δ_A 、たわみ角 i_A は、カスチリアノの定理から、

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l \frac{(-Px + M_0)(-x)}{EI} dx \quad (5)$$

$$i_A = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_0^l \frac{(-Px + M_0)(1)}{EI} dx \quad (6)$$

となる。

ここで、実際には M_0 は作用していないので、零と置けば、図 1 の場合の A 点のたわみ角は式(6)から、

$$i_A = -\frac{Pl^2}{2EI} \quad (7)$$

となり、「よくわかる材料力学」式(5・11)と一致する。同様にして、式(5)からは A におけるたわみ量が求められる。

以上のことからわかるように、任意の場所に力あるいは偶力を仮に作用させてひずみエネルギーを求め、カスチリアノの定理を適用すれば任意の場所のたわみやたわみ角が求められる。このことを一般化したものが以下の 2 式である。

$$\delta_i = \int_0^l \frac{MM'_w}{EI} dx \quad (8)$$

$$i_i = \int_0^l \frac{MM'_m}{EI} dx \quad (9)$$

ここで、 M は実際に作用している外力等による曲げモーメントであり、 $M'_w = \frac{\partial M}{\partial P_n}$ 、

$M'_m = \frac{\partial M}{\partial M_n}$ は力 P_n や偶力 M_n を仮想的に作用させたときの曲げモーメントを P_n あるいは

M_n で偏微分したものであり、仮想的に単位の力や偶力を作用させたものと考えてもよい。詳しくは「材料力学」上巻、裳華房、鶴戸口、川田、倉西共著、236 ページなどを参照されたい。

また、前述の式(2)の回転角 θ_i は、軸のねじり問題の場合には、ねじれ角 ϕ_i と考えてよい。例えば、ねじり剛性が GI_p 、長さが l である一様な太さの丸軸の一端を固定し、他端に T なるねじりモーメントを作用させた時、軸に蓄えられるひずみエネルギーは、

$$U = \frac{T^2 l}{2GI_p} \quad (10)$$

である（教科書、式 (9・8)）。したがって、この式を T で偏微分することで、自由端のねじり角は以下のように求められ、教科書の式(7・12)と一致する。

$$\phi = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{Tl}{2GI_p} \quad (11)$$

このように、カスチリアノの定理は特定の場所のたわみ量や回転角（たわみ角、ねじれ角）などを求めるときには教科書の 7 章までに説明した方法よりも楽に結果を導くことができる。教科書の演習問題 9・3 あるいは下の図 3 のように、丸棒が曲げられている状態における自由端のたわみなども比較的簡単に求められる。

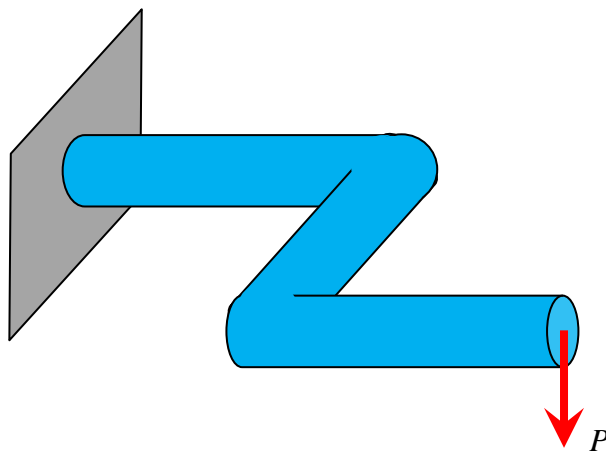


図 3