

## 第 32 話 カスチリアノの定理を知っていますか

2009 年 12 月 4 日 作成

萩原芳彦

カスチリアノの定理は、簡単に説明すれば、物体に蓄えられる弾性ひずみエネルギー  $U$  と外力  $P_i$ 、ならびにその着点の外力作用方向変位  $\lambda_i$  の間に

$$\lambda_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad (1)$$

なる関係があることを示している（詳しくは「よくわかる材料力学」150 ページ参照）。前話でひずみエネルギーの話をしたので、その関連で話をしよう。

例えば図 1 の全長  $l$  の片持ばり（縦弾性係数  $E$ 、断面 2 次モーメント  $I$ ）の自由端 A に力  $P$  が作用しているときの A 点のたわみ量（力  $P$  の作用方向変位）を  $\lambda_A$  と置くと、はりに蓄えられる弾性ひずみエネルギー  $U$  から、以下の手順によりたわみ量  $\lambda_A$  が求められる。

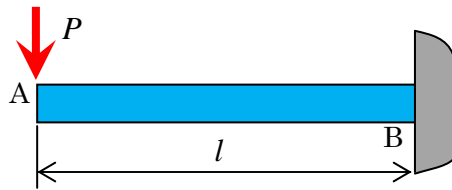


図 1

曲げモーメントにともないはりに蓄えられる弾性ひずみエネルギー  $U$  は、一般に

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2)$$

と表される（教科書 146 ページ）。

図 1 の場合、自由端から  $x$  における曲げモーメント  $M$  は、

$$M = -Px \quad (3)$$

であるので、はりの全長に蓄えられる弾性ひずみエネルギーは、

$$U = \int_0^l \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 l^3}{6EI} \quad (4)$$

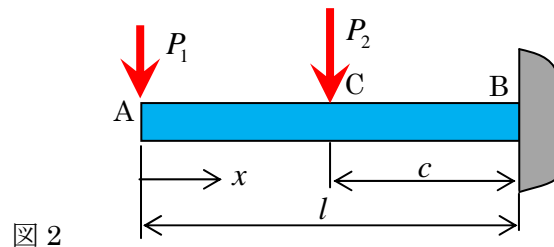
となる。

この式を力  $P$  で微分することにより、力の作用点 A の力の作用方向変位  $\lambda_A$  は、

$$\lambda_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (5)$$

となる。この式は教科書の式 (5・11) に示したものと同一である。教科書 5 章、79 ページの解法手順と比較すると、微分方程式を解く方法にくらべ、かなり簡単に結果が得られることがわかる。このように**エネルギー法は全体の変形状態などを求めるのではなく、特定の場所のたわみや反力を求めるときには特に便利な方法である。**

図 2 のように、図 1 のほりに 2 つ以上の力が作用している場合においても同じようにしてたわみを求めることはできる。ただし、第 31 話でも示したように、弾性ひずみエネルギーを求めるときに単純な足し合わせはできないことには注意する必要がある。



この場合には 2 力が同時に作用している状態での AC 間、CB 間の曲げモーメント  $M_{AC}$ 、 $M_{CB}$  をそれぞれ求め、式(2)を利用し、 $U_{AC}$ 、 $U_{CB}$  を求めなければならない。その後に、全弾性ひずみエネルギーを  $P_1$  あるいは  $P_2$  で微分することで各点のたわみが求められる。

すなわち、

$$M_{AC} = -P_1x \quad (6)$$

$$M_{CB} = -P_1x - P_2(x-c) \quad (7)$$

であるので、式(2)を用いて、全弾性ひずみエネルギーは、

$$U = U_{AC} + U_{CB} = \int_0^c \frac{P_1^2 x^2}{2EI} dx + \int_c^l \frac{\{P_1x + P_2(x-c)\}^2}{2EI} dx \quad (8)$$

となる。

したがって、A 点のたわみ  $\delta_A$  は、

$$\begin{aligned} \delta_A &= \frac{\partial U}{\partial P_1} = \int_0^c \frac{P_1 x^2}{EI} dx + \int_c^l \frac{\{P_1x + P_2(x-c)\}x}{EI} dx \\ &= \frac{P_1 l^3}{3EI} + \frac{P_2 l^3}{3EI} - \frac{P_2 c l^2}{2EI} + \frac{P_2 c^3}{6EI} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。式(8)を  $P_2$  で微分すれば C におけるたわみ量が求められる。ここでは積分計算を行う前に微分を行っているが、問題はない。このように、たわみの微分方程式から導く方法

や第 29 話のように重ね合せの原理から導く方法よりも簡単であることがわかる。解法に慣れておくとよいであろう。