

第 29 話 知っているると便利な重ね合わせの原理

2008 年 10 月 23 日 作成

萩原芳彦

重ね合わせの原理はサンプソンの原理と同様に、材料力学の問題を解くときに知っているると便利な原理の一つである。例えば、図 1 のような片持ちばりに二つの集中力が作用している場合のはりの曲げ応力やたわみはこれらの力が別々に作用している図 2(a),(b)の場合の解析結果を単に重ね合わせる、すなわち足し合わせることによって求めることができる。

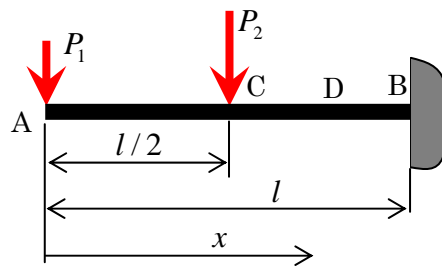


図 1

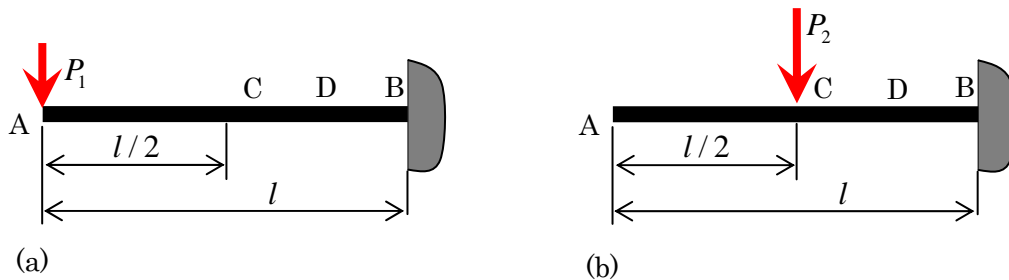


図 2

たとえば、図 1 の CB 間の midpoint D における曲げ応力を求める場合には以下のようにすればよい。図 2(a),(b)の D における曲げモーメント M_{Da} 、 M_{Db} がそれぞれ、 $-P_1 \frac{3}{4}l$ 、 $-P_2 \frac{l}{4}$ となるので、これらの曲げモーメントによる最大曲げ応力 σ_{Da} 、 σ_{Db} は、

$$\sigma_{Da} = \frac{M_{Da}}{Z}、\sigma_{Db} = \frac{M_{Db}}{Z}$$

となる（「よくわかる材料力学」、式 (4・13) などを参照）。ここで重ね合わせの原理を適用して、図 1 の場合の D における最大曲げ応力は、これらの和 $\sigma_{Da} + \sigma_{Db}$ 、として求められる。なお、 Z ははりの断面係数である。

また、はりのたわみに対しても同様に重ね合わせの原理を適用することができる。図 2(a)のはりのたわみ角 i_{AB} ならびにたわみ v_{AB} の曲線は、自由端 A からの距離を x 、はりの縦弾

性係数を E 、断面 2 次モーメントを I とすれば、それぞれ

$$i_{AB1} = \frac{P_1}{2EI} (x^2 - l^2) \quad (1)$$

$$v_{AB1} = \frac{P_1}{6EI} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) \quad (2)$$

となる（「よくわかる材料力学」、式(5・9)、(5・10)）。

また、図 2(b)の CB 間のたわみ v_{CB2} も、図 2(a)と基本的には同じと考えてよく、 x を A からの距離とすれば、式(2)の l を $l/2$ に置き換え、 x を $x - l/2$ に置き換えることで求められ、以下のようなになる。

$$v_{CB2} = \frac{P_2}{6EI} \left[\left(x - \frac{l}{2} \right)^3 - 3 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \left(x - \frac{l}{2} \right) + 2 \left(\frac{l}{2} \right)^3 \right] \quad (3)$$

さらに、図 2(b)の場合には AC 間は曲げモーメントが零となるので、この部分は変形せずに回転するだけである。したがって、たわみ v_{AC2} は

$$v_{AC2} = v_{C2} + i_{C2} \left(\frac{l}{2} - x \right) \quad (4)$$

となる。ここで、 i_{C2} 、 v_{C2} は図 2(b)の場合の C におけるたわみ角とたわみであり、

$$i_{C2} = -\frac{P_2 l^2}{8EI} \quad (5)$$

$$v_{C2} = \frac{P_2 l^3}{24EI} \quad (6)$$

となる(教科書式 (5・11) 参照)。

以上の結果から、図 1 の場合の AC 間、CB 間のはりのたわみ曲線の式は、

$$v_{AC} = v_{AB1} + v_{AC2} \quad (7)$$

$$v_{CB} = v_{AB1} + v_{CB2} \quad (8)$$

のようになる。

このように、単純な足し算で結果を出すことができる。図 1 の問題をたわみ曲線の微分方程式 (教科書、式(5・8))、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (9)$$

を基にして解くとなると厄介である。すなわち、AC、CB 間の曲げモーメントは、それぞれ、

$$M_{AC} = -P_1 x \quad (10)$$

$$M_{CD} = -P_1x - P_2\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (11)$$

となるので、これらを式(9)に代入し、得られる2つの微分方程式を解き、境界条件を入れ、求めなければならない。上記の方法に比べてかなり面倒であることが想像できるであろう。

なお、上述の例は、2つ以上の力の働きが同じ、すなわち上記の場合いずれの力も曲げ作用を起こす場合である。しかし、**曲げとねじりのように力の作用結果が異なる場合の重ね合わせには注意が必要である**。すなわち、単純に足す方法では強度計算に必要な最大応力などが求められない場合があるからである。そのような場合には教科書8・8節に説明した方法が必要となるのである。