

第 28 話 サンプナンの原理を知っていますか

2008 年 10 月 9 日 作成

萩原芳彦

‘弾性体に作用している力をこれと等価な力や力のモーメントで置き換えても、これらの作用位置から十分離れた場所における応力状態は変化しない’、これが第 27 話にも示したサンプナンの原理である。では、応力状態は力の作用場所からどれくらい離れば変わらないと言えるのであろうか。具体的な例で示しておこう。

図 1 は第 25 話などで用いたものと同じ板状の棒に力を加えた場合である。下端を固定しており、上端には等価な力が作用している。図(a)は中央に 2000N の集中力、図(b)は 2 か所に 1000N ずつの集中力、図(c)は左右対称に直線分布する分布力、図(d)は等分布する分布力であり、いずれも合力の作用位置は上端の中央 (図(a)の集中力と同じ場所) であり、大きさは 2000N の上向きの力である。

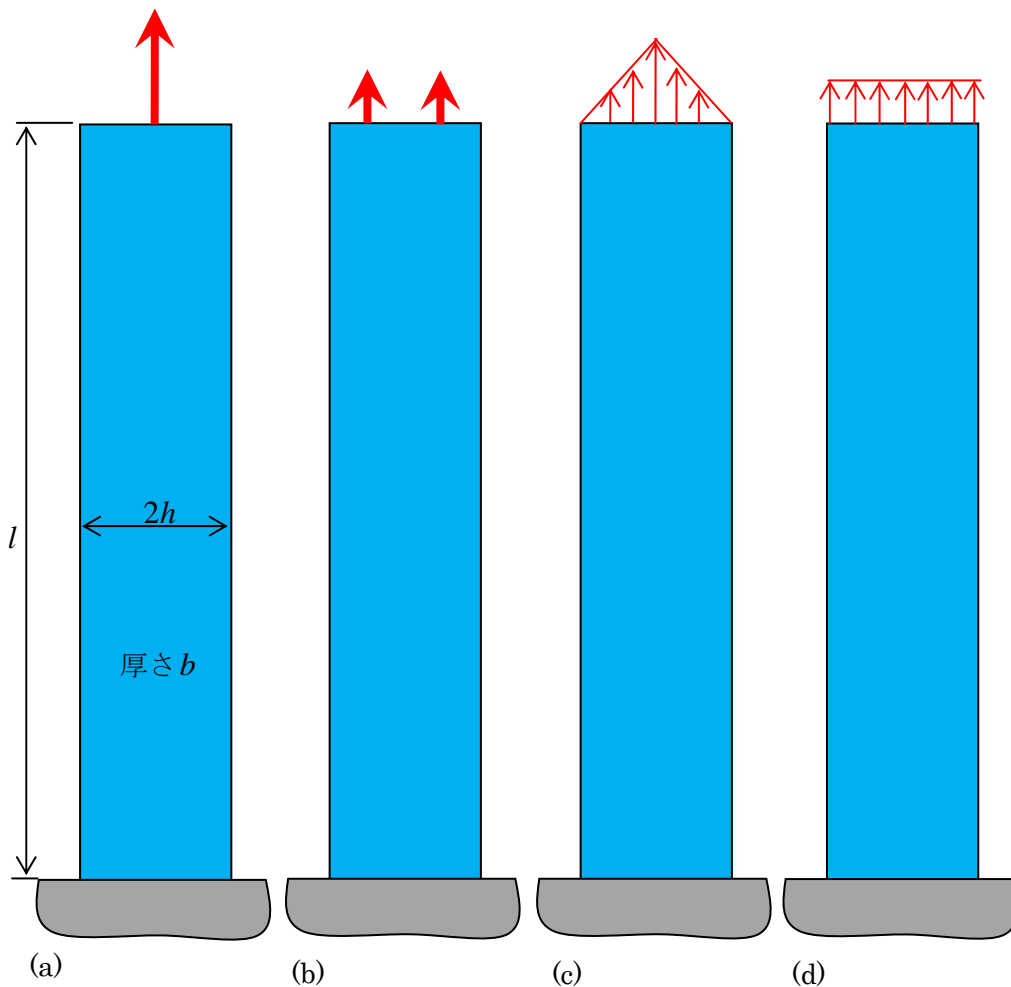


図 1

ここで、棒の長さ $l = 100 \text{ mm}$ 、幅 $2h = 20 \text{ mm}$ 、厚さ $b = 1 \text{ mm}$ であるとする、初等材料力学で計算できる棒の横断面に生ずる引張り応力は、いずれも 100 MPa となり、同じ応力となる。しかしながら、力の作用場所近くでは力の作用の仕方により応力は変わる。図 2 は図 1 の場合の 2 次元有限要素法解析結果であり、棒の長手方向の垂直応力の分布状態を色で表示してある。赤色の場所の応力が高く、青色の場所に向かうほど応力は低下することを示している。

図 2 の場合、力の作用場所付近から約 30 mm 以上離ればいずれの場合も色が同じ（黄緑色）であり、力の作用方法が異なっても応力状態は同じであることを示している。なお、この黄緑色の部分での棒の長手方向応力は $100 \pm 1 \text{ MPa}$ の範囲に入っている。すなわち、誤差 1% 程度は問題ないとするのであれば、力の作用場所から板幅寸法（力の作用方法が異なる範囲の寸法）と同じ程度以上離れば、等価な力で解析した結果を使ってほぼ問題ないことがわかる。

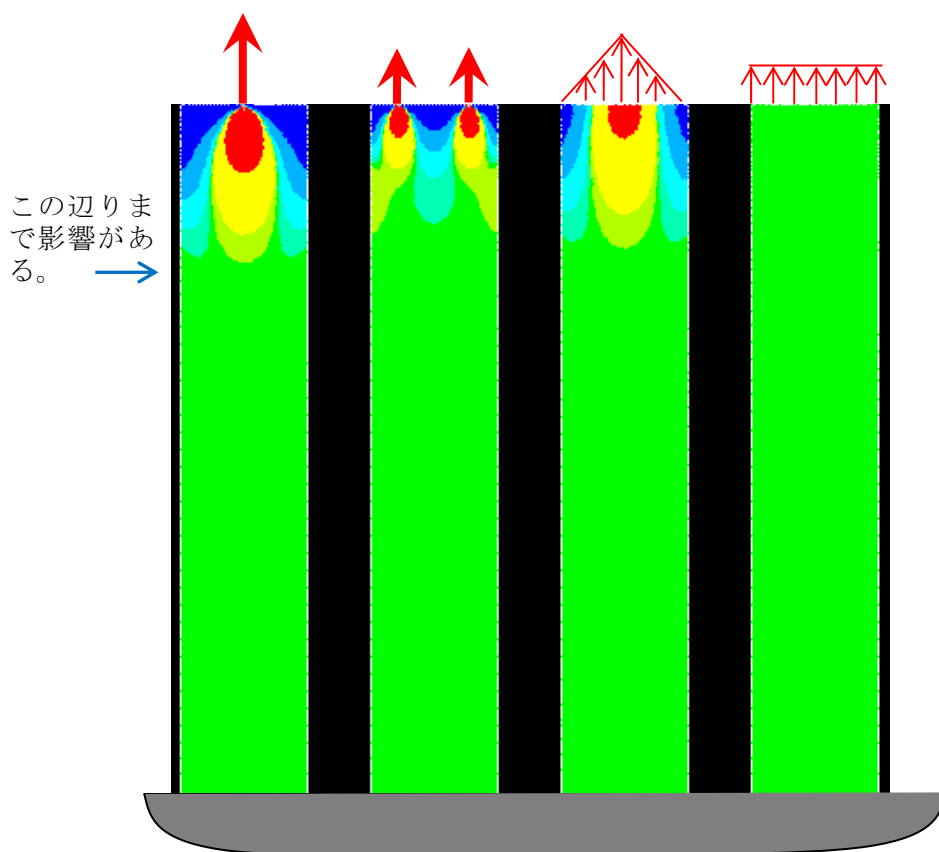


図 2

なお、分布の色の表示を変え、 $100 \pm 0.1 \text{MPa}$ の範囲に入っているところを黄緑色で表示したものが図3である。この図からわかるように、すべての力の作用方法において誤差0.1%以内に収まるのは、力の作用場所から板幅20mmの約2倍以上離れたところであることになる。このように、誤差の範囲をどの程度に考えるかによって影響範囲の定義は変わる。弾性解析の厳密解との比較などの場合を除けば、材料強度のばらつきを考えると、実用上はおおむね力の作用範囲と同程度以上離れていれば、応力分布は変わらないと考えてよいであろう。

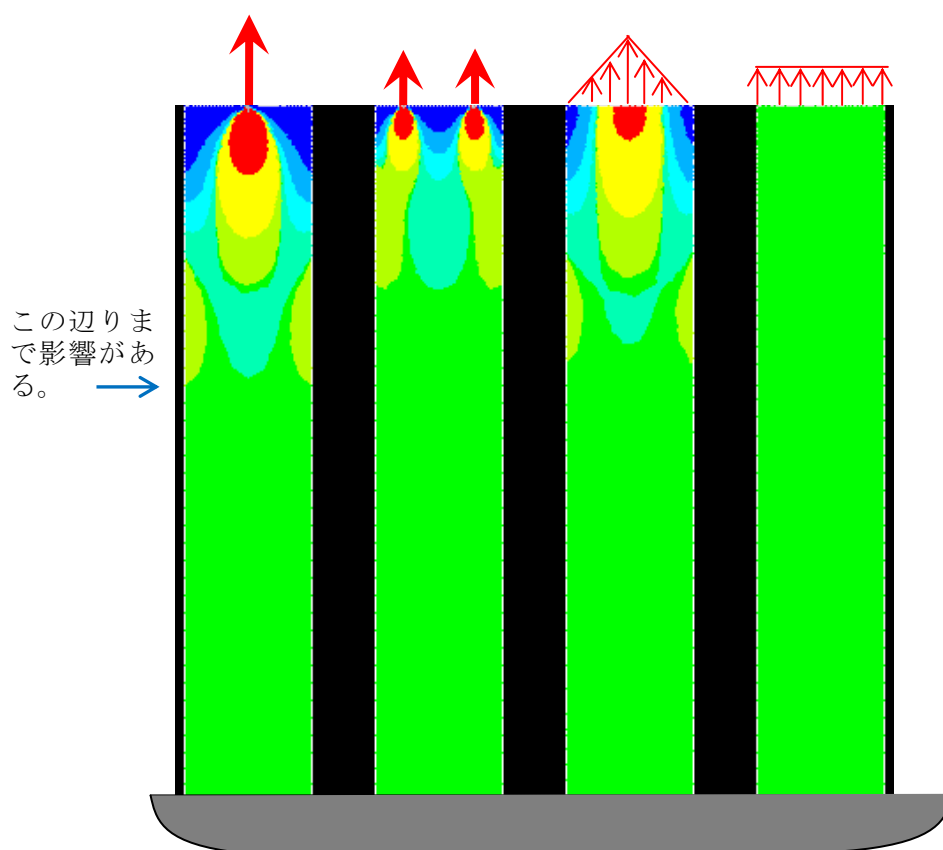


図3

図4、5は図1の棒において、力の作用点近くに円孔を設けた場合の解析結果である。円孔の影響で応力は乱れているが、力の作用方法の違いの影響は図2で示したものと同一程度離れた範囲までしか現われていないことがわかる。応力は $100 \pm 1 \text{MPa}$ の範囲に入っている部分が黄緑色で示されている。さらに、切欠の位置が左右対称ではない図6のような形状の場合においても影響の程度はほぼ同じであることもわかる。

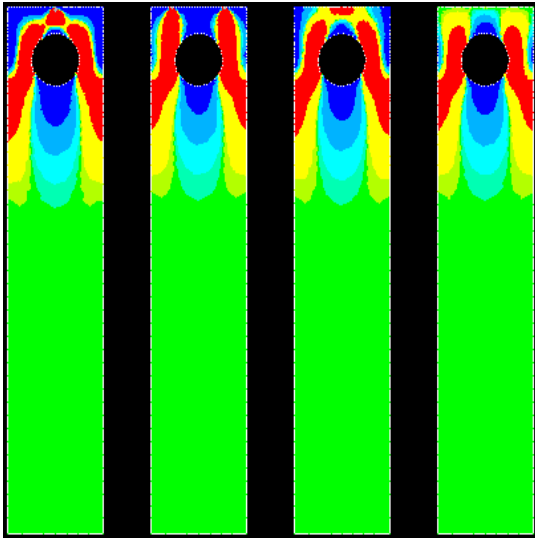


図 4

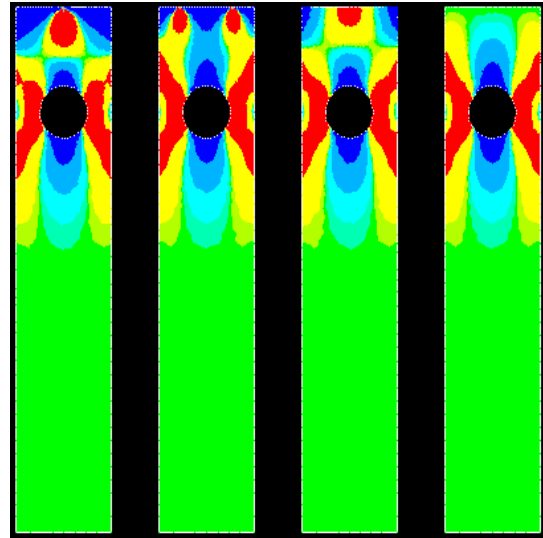


図 5

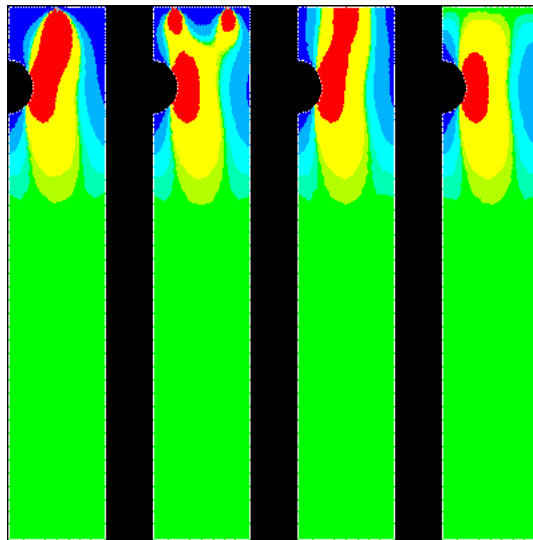
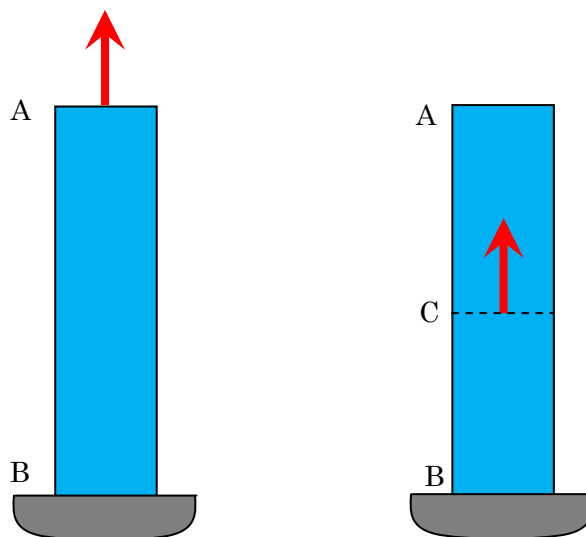


図 6

なお、蛇足ではあるが、冒頭に述べた等価な力や力のモーメントの作用場所は元の力の作用場所に近いところにあることが暗黙の了解としてある。例えば、図 7(a)に作用する力と等価な力であっても、図 7(b)のような力のように、元の力の作用場所から離れた場所に作用する場合には、物体中の応力状態は異なるものになる。

図 7(a)の場合の応力は力の作用点近傍を除けば AB 間で一様であるが、図 7(b)の場合の AC 間の応力は零である。すなわち、剛体の力学で言う等価な力（例えば弊著「よくわかる工業力学」20 ページ参照）の定義をそのまま鵜呑みにして変形する物体の場合の等価な力

と考えることはできないのである。変形する物体を扱う場合には等価な力であるだけでなく、その力の作用点をも正しく定めなければならないのである。



(a)

(b)

図 6