

第 23 話 どちらのたわみが大きいですか

2008 年 7 月 3 日 作成

萩原芳彦

図 1(a)の様なはりの AB 間の midpoint C に力 P が作用しているときの D のたわみの絶対値と、図 1(b)のように、同じはりの D に力 P が作用しているときの C のたわみの絶対値ではどちらが大きいであろうか。

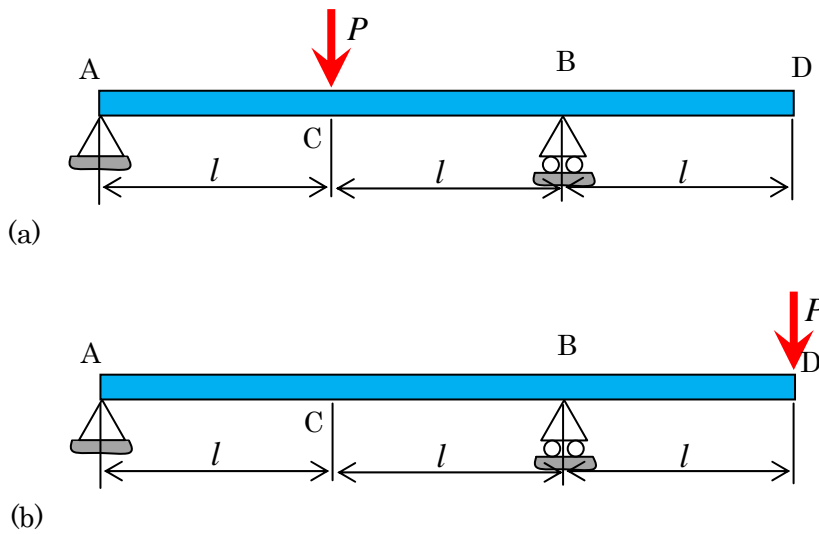


図 1

結論は、**たわみ量の絶対値は等しくなる**、である。ではその理由は何であろうか。AC、CB、BD の長さが等しいからなどと言うことではない。これは、**相反定理**あるいは**マクスウェルの定理**と呼ばれる定理によっている。すなわち、この定理をこの場合に適用すれば、「C の場所に単位の荷重を作用させた場合の D の場所の荷重方向変位は、D の場所に単位の荷重を作用させた場合の C の場所の荷重方向変位と等しくなる。」である。なお、定理の導出や変位の方法など、詳しいことは、「よくわかる材料力学」、150 ページに示してある。

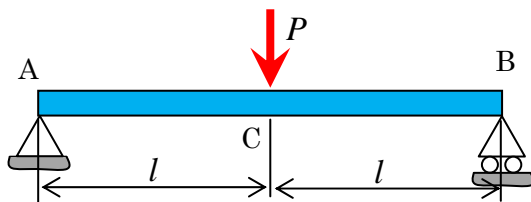


図 2

この問題は、多くの書籍に載っている図 2 に示すような単純支持ばりの中央 C に荷重が作用する場合のたわみの状態を知っていれば、図 1(b) の様な荷重条件の場合の C におけるたわみが簡単に求められることを意味している。なお、付け加えておけば、荷重を加えている C ははりの midpoint である必要はなく、任意の場所でよいのである。以下に求め方を示しておこう。

まず、図 2 のはりの支点 B におけるたわみ角は

$$i_B = -\frac{Pl^2}{4EI}$$

となることは既存の結果からわかる（よくわかる材料力学では 87 ページ演習問題 5・8 参照）。これは図 1(a) のはりの B におけるたわみ角と等しく、図 1(a) のはりの BD 部分は変形せずに回転するだけであるので、D 点のたわみ量は図 3 からわかるように

$$\delta_D = i_B l = -\frac{Pl^3}{4EI}$$

のように、簡単に求めることができる。なお、たわみ角は微小であることを前提に考えている。

これに対して、図 1(b) の場合の C 点のたわみの解析結果は一般にはあまり見かけない。しかし、相反定理によれば上記の値と等しくなるので、計算をしなくても求めることができるというわけである。

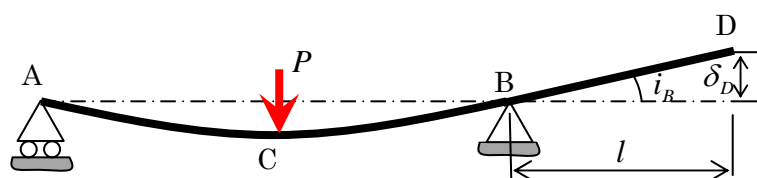


図 3

以上においては、はりの曲げを例に説明したが、図 4 のように棒を引張った場合の例の方が理解しやすいかもしれない。すなわち、図 4(a) の場合の C 点の移動量は図 4(b) の場合の B 点の移動量と等しくなる。このように、相反定理を知っていると、計算が厄介と思われるものでも簡単に結果がわかる場合がある。図 4 の例は、第 2 話において示したゴムを用いた実験によっても確認できる。実験してみるのもよいであろう。ただし、第 3 話で説明した**ゴムの性質には注意して実験する**ことが必要である。

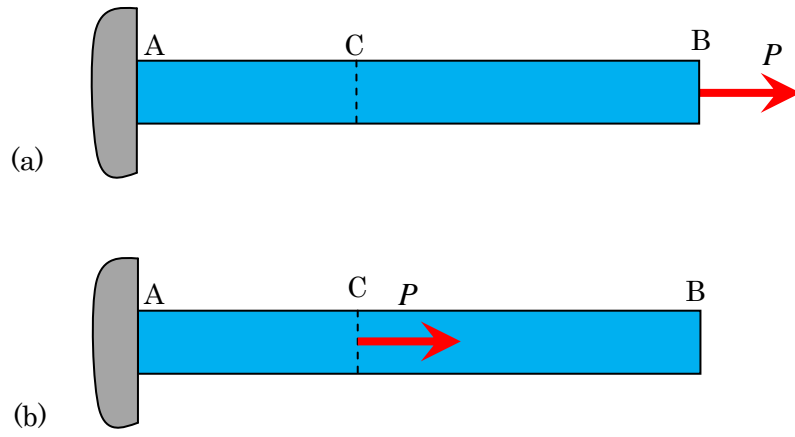


図 4 図(a)の C 点の変位量と図(b)の B 点の変位量は等しくなる。