

## 第 19 話 支え方でこんなに違うはりの強度

2008 年 5 月 8 日 作成

萩原芳彦

設計演習の授業における自由課題の中で、曲げを受ける部材が含まれる場合がある。このようなとき、簡単な計算で済ませようとして、単純支持ばりとして設計する学生をよく見かける。しかし、はりはその**支え方によって強度上必要な断面の大きさは変化し、経済性、軽量化など、実用上重要な問題を含んでいる**のである。その一例を示しておこう。

図 1 は単純支持ばりの中央に集中荷重が作用している場合である。この状態の曲げモーメントは、図中に緑色で示してある曲げモーメント図が示すように、荷重点 C において最大となる。このため、はりの断面が全長にわたり同じ形状である場合、曲げ応力は荷重点 C の下側表面において最大値をとる。このときの、C における曲げモーメント  $M_{C1}$ 、最大曲げ応力  $\sigma_{C1}$  は

$$M_{C1} = R_A a = \frac{Pa}{2} \quad (1)$$

$$\sigma_{C1} = \frac{M_{C1}}{Z_1} = \frac{3Pa}{b_1 h_1^2} \quad (2)$$

となる。ここで、 $Z_1$  はこのはりの断面係数であり、 $b_1$ 、 $h_1$  ははりを長方形断面としたときの断面の幅と高さである。

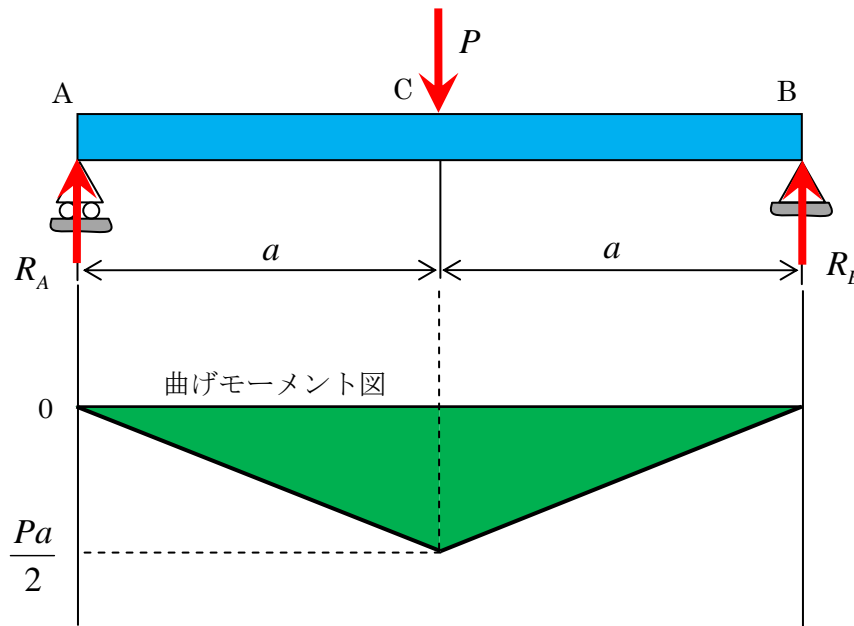


図 1

このはりの左右の支点を図 2 のように固定支持としたときはどうなるであろうか。この場合には、左右の支点到支持反力  $R_A$ 、 $R_B$  の他に支持モーメント  $M_A$ 、 $M_B$  も生じ、未知な量が 4 つになる。そのため、図 1 の単純支持ばかりが **静定問題** であったのに対して、この問題は **不静定問題** となる。これらの未知量を求めるためには、はりのたわみまで考えなければならない。ここではその解法過程は省略し、支点反力、支持モーメントの結果だけ示すと、図 2 に示す矢印の向きにそれぞれ式(3),(4)のようになる。解法については「よくわかる材料力学」6章の手法を参考にしてもらいたい。

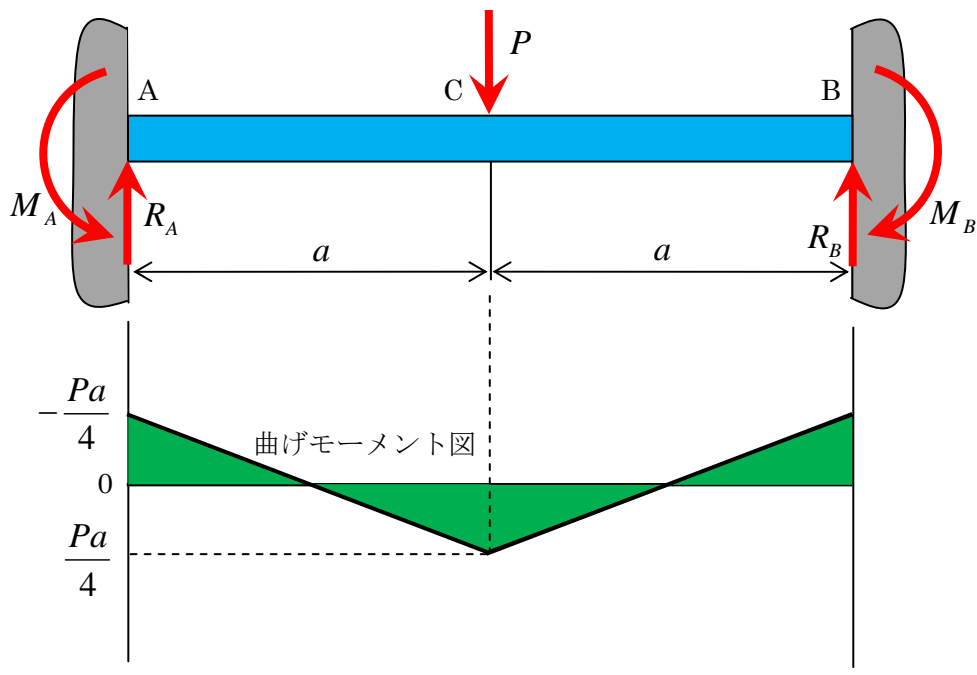


図 2

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \quad (3)$$

$$M_A = M_B = \frac{aP}{4} \quad (4)$$

この結果から、はりの AC 間における A より  $x$  のところでの曲げモーメント  $M_x$  は、

$$M_x = R_A x - M_A = \frac{P}{2} x - \frac{aP}{4} \quad (5)$$

となる。図中に緑色で示したものがこの場合の曲げモーメント図である。

AC 間において、曲げモーメントの絶対値が最大となるのは図の A、C の 2 か所であり、その絶対値は以下ようになる。

$$M_A = M_C = \frac{aP}{4} \quad (6)$$

この値は単純支持ばりの時の最大曲げモーメントである式(1)の半分であり、このときのA、Cにおける最大曲げ応力は、

$$\sigma_{A2} = \sigma_{C2} = \frac{M_{A2}}{Z_2} = \frac{M_{C2}}{Z_2} = \frac{3Pa}{2b_2h_2^2} \quad (7)$$

となる。ただし、Aにおける最大曲げ応力ははりの上側表面において生じ、Cにおける最大曲げ応力ははりの下側表面において生ずる。ここで、 $Z_2$ は固定ばりの断面係数、 $b_2$ 、 $h_2$ は、はりを長方形断面としたときの断面の幅と高さである。なお、この問題では左右対称であるのでBにおける状態はAと同じである。

いま、両方のはりともに最大曲げ応力が許容応力 $\sigma_w$ に等しいものとするれば、式(2),(7)から、

$$\sigma_w = \frac{3Pa}{b_1h_1^2} = \frac{3Pa}{2b_2h_2^2}$$

となる。例えば、ここでははりが幅と高さの等しい ( $b_1 = h_1$ 、 $b_2 = h_2$ ) 正方形断面のはりであるとすれば、

$$\frac{b_1^3}{b_2^3} = 2 \quad \text{あるいは} \quad b_1 = b_2 \sqrt[3]{2} = 1.26b_2$$

となる。

すなわち、単純支持ばりの幅と高さは固定ばりの幅と高さの1.26倍大きくする必要があらことを示している。これを断面積で考えれば、約1.6倍大きくする必要があり、それだけ単純支持ばりの方が太く、重量も増すことになり、材料費の軽減、軽量化のためには固定ばりの方が優れていることが分かる。これは正方形断面の場合であり、幅と高さが異なる長方形断面であればさらに差が開くことも起きる。

なお、図1、2に示した曲げモーメント図からも分かるように、図1の単純支持ばりの場合、最大曲げ応力はすべての場所ではりの下側表面において生ずるが、固定ばりの場合には固定部近くでは最大曲げ応力がはりの上側表面に生じ、荷重点近くでははりの下側表面で生ずることになる。はりの断面形状を三角形やT型など、上下対称でない形にする場合には曲げ応力の分布が引張りと圧縮で対称ではなくなるため、注意が必要である。一般に材料は圧縮よりも引張の応力に弱いからである。

図4は、いずれも幅25mm、高さ50mmの長方形断面を有するスパン500mmのはりを図1の単純支持とした場合と図2の固定支持とした場合の有限要素法解析結果である。応力状態は赤色の方が高いことを示しており、荷重条件は同じであるが、単純支持ばりの方が高い応力状態にあることがわかる。また、変形具合からわかるように、たわみ量も単純

支持ばりの方が大きく、最大たわみは単純支持ばりの方が約 2.7 倍大きくなる。このように、はりの支持の仕方によって、最大応力も最大たわみもかなり異なることが分かるであろう。設計する上でも、現場で保守・管理する上でも頭に入れておくといよいであろう。

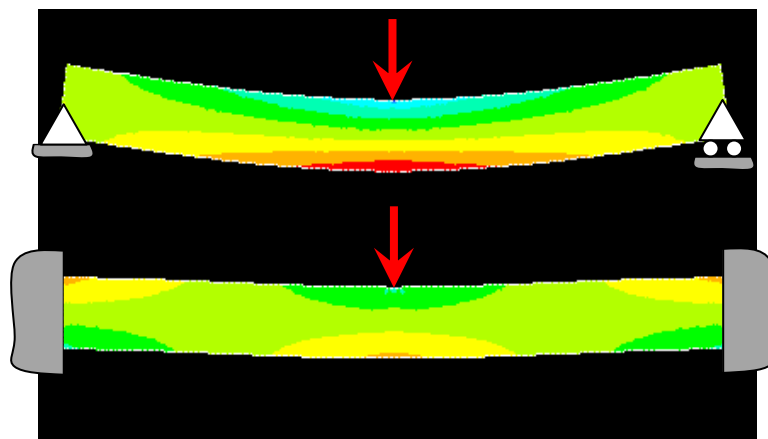


図 4 有限要素法による解析結果