

第 15 話 ゴムの棒をねじったときの形

2008 年 1 月 20 日 作成

萩原芳彦

第 13 話においてゴムの棒を曲げたときの変形の様子を話したが、ここではゴムの棒をねじった場合についての話をしよう。初等材料力学において扱う軸のねじり問題は、丸軸や円筒軸などの軸対称な場合がほとんどである。実際に、機械部品として棒状部材がねじりを受ける状態で使われるのは、伝動軸などが大半であり、軸対称な形状のねじり状況を知っておくことは重要である。

一方、断面が軸対称な形ではない角棒などのねじり問題の解析は複雑であり、その応力や変形の状況は軸対称な棒のねじりの場合とだいぶ異なることを知っておくことも、機械の強度設計を行う上で必要なことである。細かな計算法は別として、その要点をここで話そう。第 11 話も合わせて読んでいただければ一層理解が深まるであろう。

まず、教科書 103 ページにも載っている軸対称な断面形状である丸棒（円筒を含む）のねじりにおいて基本となる式の要点を説明しよう。丸棒のねじりの基本式の誘導にあたっては、以下の 2 つの仮定が設けられている。

仮定(1)：丸棒の軸に垂直な平面は、ねじり変形後も円形でかつ平面を保つ。

仮定(2)：軸に垂直な平面において半径方向に想定した直線は、ねじり変形後も直線を保つ。

これらの仮定ならびにフックの法則、 $\tau = G\gamma$ 、を用いて、

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p} \quad (1)$$

$$\tau_1 = \frac{Tr_1}{I_p} \quad (2)$$

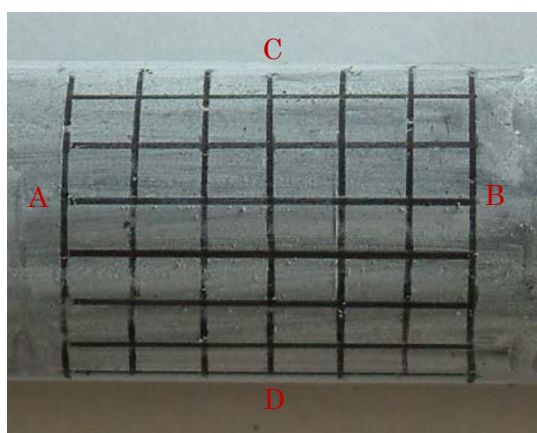
などの一様な太さの丸軸に関する応力やひずみの基本式が導かれる。

ここで、 l は軸の全長、 r_1 は軸の外半径、 ϕ は軸の全長のねじれ角、 τ_1 は軸表面における最大せん断応力、 T は軸に生じているねじりモーメント、 G はせん断弾性係数、 γ はせん断ひずみ、 I_p は断面二次極モーメントである。上の 2 式は中実丸軸だけではなく、軸対称な円筒のねじりの式としても使える。

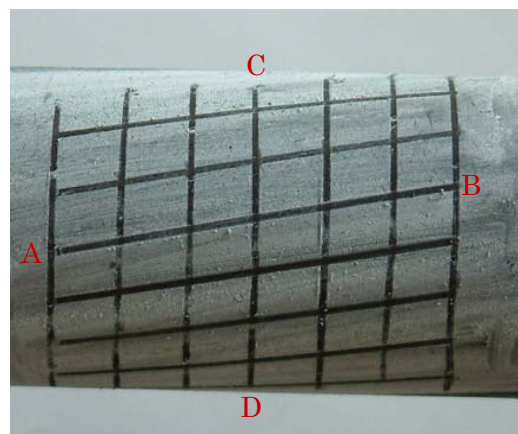
以上のことを目にみえる形で表すために、変形させやすいゴムの棒をねじってみよう。図1は第13話で示したものと同一ゴムの棒である。このうちの円形断面である丸棒をねじると、変形前にゴム表面に描いた、図2(a)のような碁盤の目は図2(b)のように形を変える。写真の例では直線の描き方があまり良くないが、棒の長手方向に描いた直線 AB はらせん状に変化することがわかる。これに対して、円周方向に描いた直線 CD は元と同じ直線となっており、形が変わらないこともわかる。後者のことは、上述の仮定(1)が成り立っていることを示している。丸棒のような軸対称な棒のねじりの場合、仮定(2)も成立つが、ゴムの内部を見ることができないため、ここでは示すことができない。



図1 種々断面形状のゴムの棒



(a) 変形前



(b) 変形後

図2 丸軸をねじった場合

この結果、升目の正方形は変形後に平行四辺形に変わり、その変形具合はどの場所でも同じである。すなわち、丸軸の場合、軸対称であるため表面の円周上どの場所も同じように変形することがわかる。図のゴムの棒は太さが一様であるため、軸の長手方向でも変形状態は変わらない。また、このように正方形が平行四辺形に変形することは、図 3 に示すように、せん断応力が影響していることを示しており、写真に示された升目の変形の程度はせん断応力の大きさの程度を表していると考えてよい。その結果、フックの法則としては、せん断応力とせん断ひずみの関係式、 $\tau = G\gamma$ が用いられることも理解できるであろう。

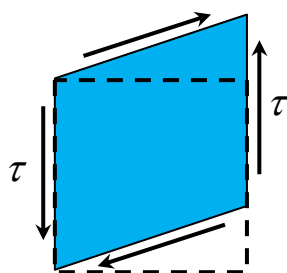


図 3 せん断応力とせん断変形

これに対して、図 4 のように、正方形断面の棒をねじった場合、変形状態は複雑であり、変形後の升目をみると以下のことが分かる。

- ① 軸に垂直方向に描いた直線 CD は図 4 のように、変形後は丸軸の場合と異なり、逆 S 字状の曲線となる。
- ② 変形前、正方形であった升目は変形後平行四辺形に変わるが、その形は場所によって異なる。すなわち、ゴムの棒の稜線 C あるいは D の近くの方が変形は少なく正方形により近い形を示すのに対して、辺の中央部 O の近くでは変形は著しい。

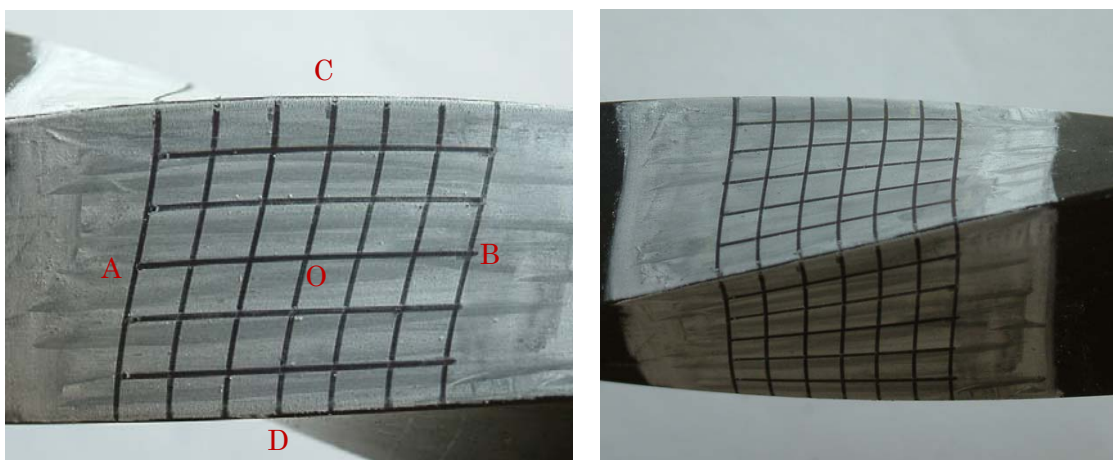


図 4 角棒をねじった場合

これらのことから、丸棒のねじりの式を導く場合に用いた仮定は角棒のねじりの場合には成り立たないことが分かる。すなわち、式(1),(2)などは軸対称ではない棒のねじりの式としては使えない。

例えば、長方形断面の棒のねじり応力の概要を説明すると以下のようになる。丸棒のねじりにおいては、軸中心から距離が遠くなるに従い、応力はその距離に比例して増加するが、図5のような長方形断面の角棒の場合にはそのような性質はない。軸中心(図心位置O)から距離が一番遠い稜線部Aでは応力が零となり、軸表面のせん断応力は辺の midpoint で最大となる。また、長辺の midpoint B(軸心から近い)の応力の方が短辺の midpoint C(軸心から遠い)の応力よりも高くなる。

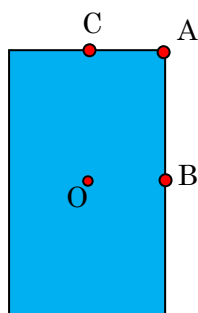


図5 長方形断面棒のねじり



図6 中空蒲錐形断面棒のねじり

図6は中空の蒲錐形断面の棒をねじった場合であり、この場合にも軸線に垂直な横断面に沿った方向の直線は変形後曲線に変化している。これらのことの詳細は教科書113ページを参考にされるとよいであろう。また、軸対称ではない棒のねじりの様子については、本ホームページ内の「描きながら考える材料力学」、第11章の問題11・6ならびに解答例の有限要素法解析による応力分布図も参考にされるとよいであろう。

以上のように、軸の断面形状によって応力状態はいろいろに変化する。鷯戸口、川田、倉西共著、「材料力学」上巻、裳華房などにはより詳しく載っているので参考にされるとよいであろう。このような軸対称でない棒のねじり問題の応力やひずみの状況も、最近では有限要素法解析ソフトを用いれば、簡単に求めることが可能ではあるが、解析が正しくなされたかを判断するときには基本的な事柄をしっかりと把握していることが必要となる。また、ここで示した変形の写真は目で見てわかるように、ゴムをかなり大きく変形させており、フックの法則が成り立たない状態であるとともに大変形問題の領域でもあるが、ねじりの基本事項を理解するためにはおおむね支障はない。