

第 14 話 曲がった棒を折りやすいのはどちら？

2007 年 1 月 10 日 作成

萩原芳彦

例えば、断面形状が正方形である図 1 のように曲がった丸棒を折り曲げて 2 つに破壊させたいとき、図 1 (a),(b)いずれの向きの力のモーメントを作用させたほうが少ない労力で破壊するだろうか。

答えは図(a)の方であるが、最近発行された初等材料力学の教科書、参考書の中にはこの点について扱っているものは少なく、極端な場合には真直ぐなはり（真直ばり）の応力計算の式をそのまま用いて曲がったはり（曲りばり）の曲げ応力を計算する記述をしているものもある。授業などでは詳細は抜きにしても、おそらく多くの教員はその違いを説明しているであろうが（教科書、「よくわかる材料力学」72 ページ参照）、学習者は見落としがちであり、注意が必要である。以下に要点を説明しよう。

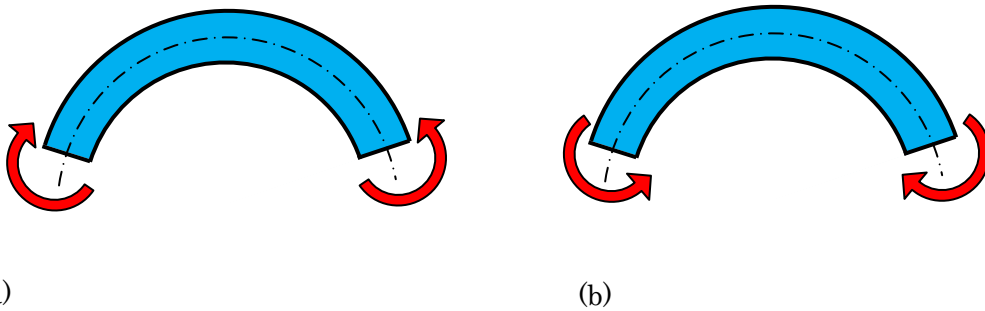


図 1 曲りばりを曲げる

真直ぐなはりの曲げ応力 σ の分布は、教科書 4・1 節において仮定を設けながら導いた式 (4・11) のように、中立軸（曲げ応力が零となり、真直ばりでは図心を通る）からの距離 y に比例して変化し、

$$\sigma = \frac{M_0}{I} y \quad (1)$$

で表される。ここで、 M_0 は断面における曲げモーメント、 I は断面 2 次モーメントである。

例えば、はりが円形断面あるいは長方形断面である場合には、図心(重心)が中央にあるため、曲げ応力の分布は引張り、圧縮が対称である図 2 のような分布となる。しかしながら、式(1)が成り立つのは、第 13 話でも説明した、はりが真直ぐである、真直ばりの場合だけである。

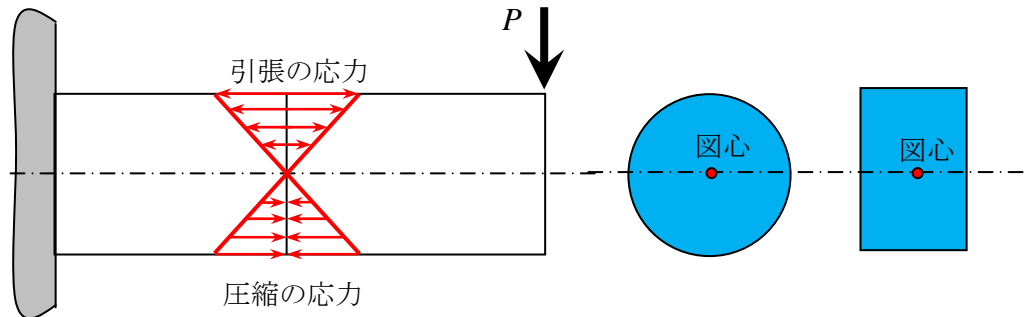


図2 真直はりの曲げ応力分布（図心が対称な位置にある場合）

図1のように、はりをはじめから曲がっている場合における曲げ応力の分布は上記の式、あるいは図2で表されるような直線分布をとらずに、図3(a)(b)のような曲線分布を示す。近似計算としておおよその見当をつける場合には式(1)を用いるのもひとつの方法ではあるが、それを行うのは曲りばりの曲げ応力の分布状況を正しく認識してのことであり、式(1)による値をそのまま強度計算結果として使うことは問題である場合が多々あるのである。

曲がったはりやアーチ状の部材が曲げられた場合の応力の要点を、教科書から抜粋し、図3を見ながら説明すれば、以下ようになる。

- ① 応力の分布は図のように曲線分布となる。
- ② 曲げ応力が零となるところOは、直線ばりの場合と異なり、はりの断面の図心(重心)を通る軸上にはない。
- ③ 曲げ応力の絶対値が最大となるのは、はりの凹側（内側）表面である。

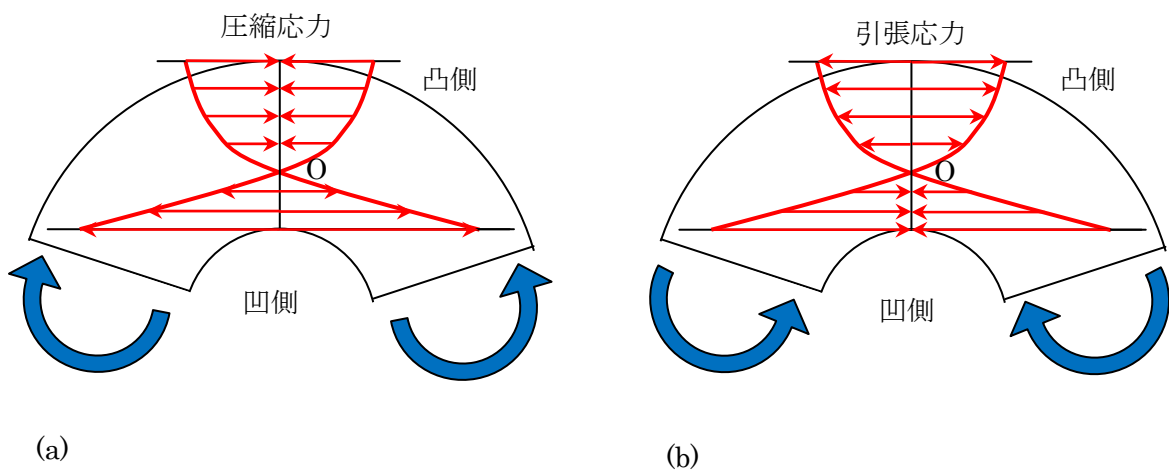


図3 曲りばりの応力分布

なお、曲りばりの応力分布の式は以下のようになるが、曲げモーメント M の正負、 y の原点とその正の方向など、実際の計算を行う場合には、直線ばりの式(1)の場合とは異なるところがあるので注意が必要である。詳細は教科書 72 ページを参考にしてほしい。

$$\sigma = \frac{M}{Ar_0} \left(1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{y}{r_0 + y} \right) \quad (2)$$

曲りばりの応力計算式の使い方は教科書を見てもらうこととして、ここでは曲りばりに生ずる応力の最大値が直線ばりの式(1)で計算した場合とどの程度違うかを具体的な数値で示しておこう。

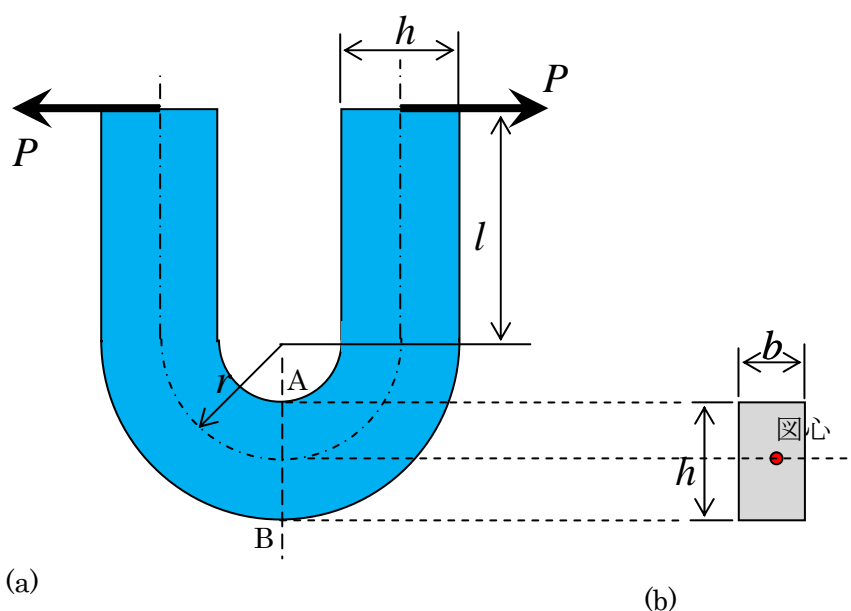


図 4

図 4 (a)は、断面が図 4(b)に示した長方形である曲がった棒の両端に外力 P を作用させて曲げている状態を示す。その断面寸法を $b = 10 \text{ mm}$ 、 $h = 20 \text{ mm}$ 、曲がった部分の図心に関する曲率半径を $r = 20 \text{ mm}$ 、左右の直線部分の長さを $l = 40 \text{ mm}$ とする。いま、この棒の両端に図の向きに、 $P = 1500 \text{ N}$ の力が作用したときの中央 AB 断面における最大並びに最小の垂直応力を求めると、以下のようなになる。

ここで、AB 断面における曲げモーメントは、 $M = P(l + r) = 1500 \times 60 = 90000 \text{ Nmm}$ であり、この場合、力のかかる方向ははりの曲率半径を増加させる方に作用しているなのでその曲げモーメントは負とし、式 (2) に代入するときには -90000 Nmm を入れなければならない。その結果、最大曲げ応力は A 点、最小曲げ応力は B 点において生じ、それぞれ

$$\sigma_{\max} = 205.7\text{MPa}, \quad \sigma_{\min} = -98.6\text{MPa}$$

となる。

一方、上記の曲りばりと同じ断面形状ならびに同じ曲げモーメントを受ける直線ばりに生ずる曲げ応力の最大値と最小値は式 (1) を用い、以下のように求められる。

$$\sigma_{0\max} = 135\text{MPa}, \quad \sigma_{0\min} = -135\text{MPa}$$

これらを比較すればわかるように、この場合には、直線ばりに比べて、約 1.5 倍高い引張り応力が凹側（内側）表面 A に生ずる。

また、この場合、AB 断面には引張りの軸力 P も作用するのでそれによる引張り応力 (P/bh) が断面に一様に生じ、その値は 7.5MPa となるので、実際はこの値を加えた 213MPa の引張り応力が内側表面に生じていることになる。一方、図 4 における力 P の作用方向を逆にした場合には、曲げモーメントによる最大曲げ応力は B 点、最小曲げ応力は A 点で生じ、それぞれ、以下のようなになる。

$$\sigma_{\max} = 98.6\text{MPa}, \quad \sigma_{\min} = -205.7\text{MPa}$$

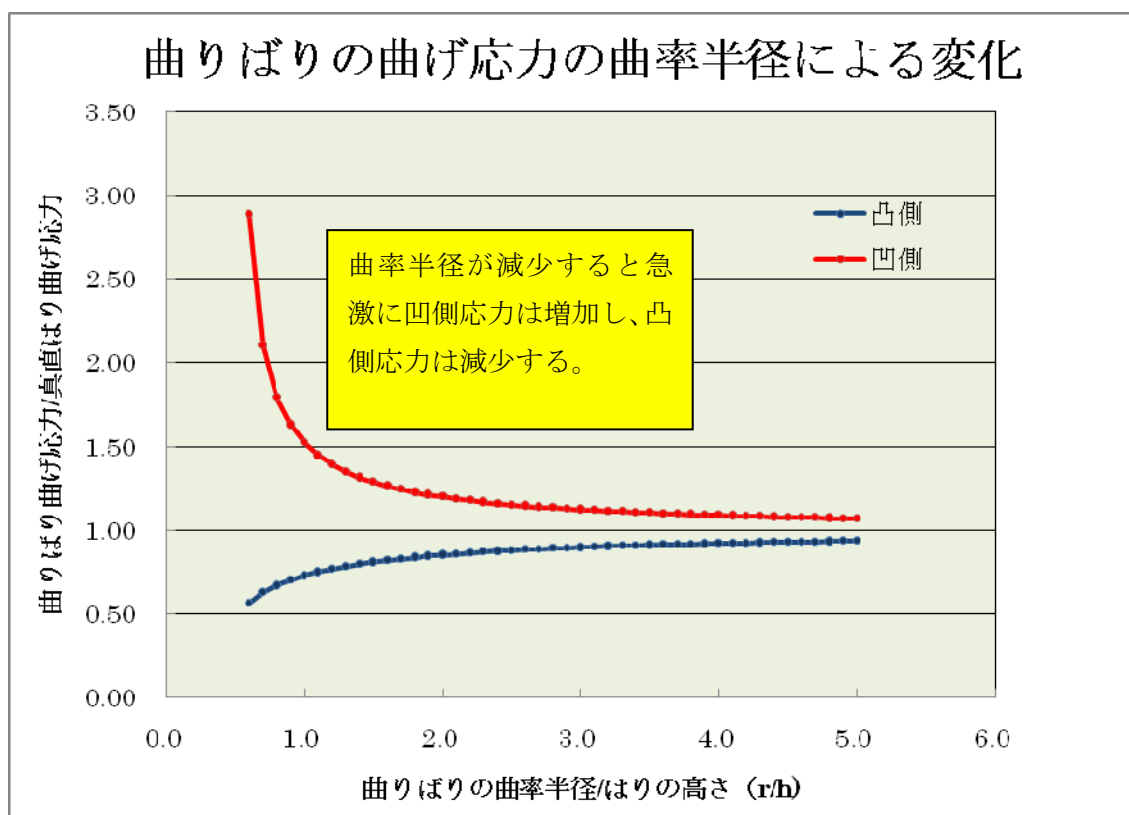


図 5 曲りばりと真直ばりの曲げ応力の比較

材料は一般に圧縮よりも引張りの応力に弱いため、図 4 に示したような曲りばりの曲率半径を大きくする方向に力が作用するほうが高い引張り応力を生じ、破壊しやすく、図 1 の場合では(a)の方がそれに該当するのである。

図 5 は、上述の長方形断面の曲りばりの曲率半径 r だけを種々に変化させた場合において、曲りばりの最大応力、最小応力が真直ばりの曲げ応力に対してどれだけ異なるかを示した一例である。図からわかるように、はりの高さ h と曲率半径 r が同じとなる、 $r/h=1.0$ の場合には最大応力（凹側）は直線ばりの計算式による値の 1.5 倍となる。それよりも r/h が小さくなれば急激に最大応力は増加することも図からわかる。また、曲率半径がはりの高さの 4 ないし 5 倍程度の緩やかな曲がりをもった棒の場合でも 10% 程度の応力上昇があることも分かる。なお、図 5 の結果には軸力による垂直応力の影響は含まれていない。

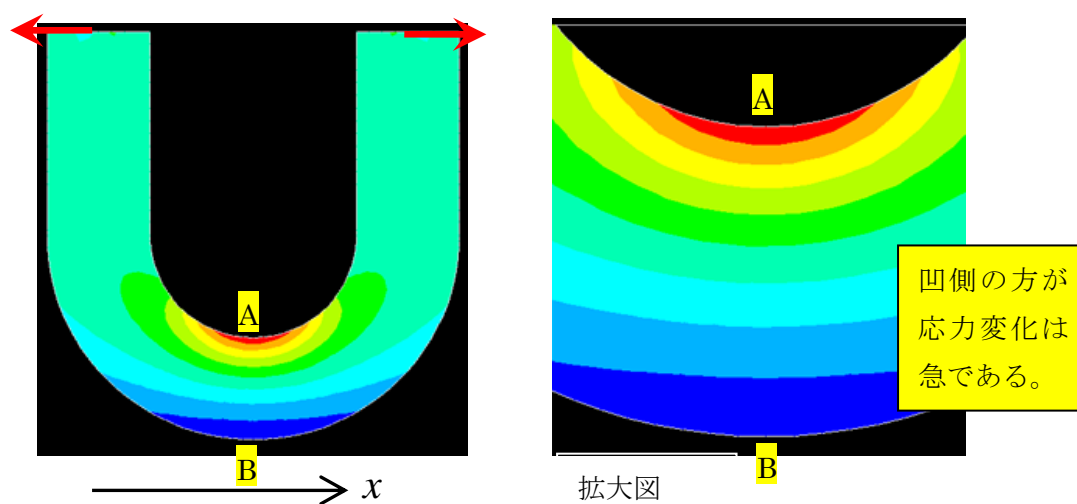


図 6 x 方向の垂直応力状態

図 6 は、図 4 の形状とは曲率半径が異なる、 $r=30\text{ mm}$ の場合 ($r/h=1.5$) を有限要素法で解析した結果であり、軸力の影響も含まれているが、凹側 (A 側) で色の変化が急であり、応力が急激に変化していることが分かる。それに比べて凸側 (B 側) に行くほど応力は緩やかに変化することがわかるであろう。このように、曲りばりの場合には図 3 でも示したように、応力は曲線分布をする。なお、図 6 に示した解析結果の色分け表示は図の x 方向の垂直応力の分布に対して行ったものであり、各場所の最大応力あるいは最小応力に対して行ったものではないことに注意してもらいたい。

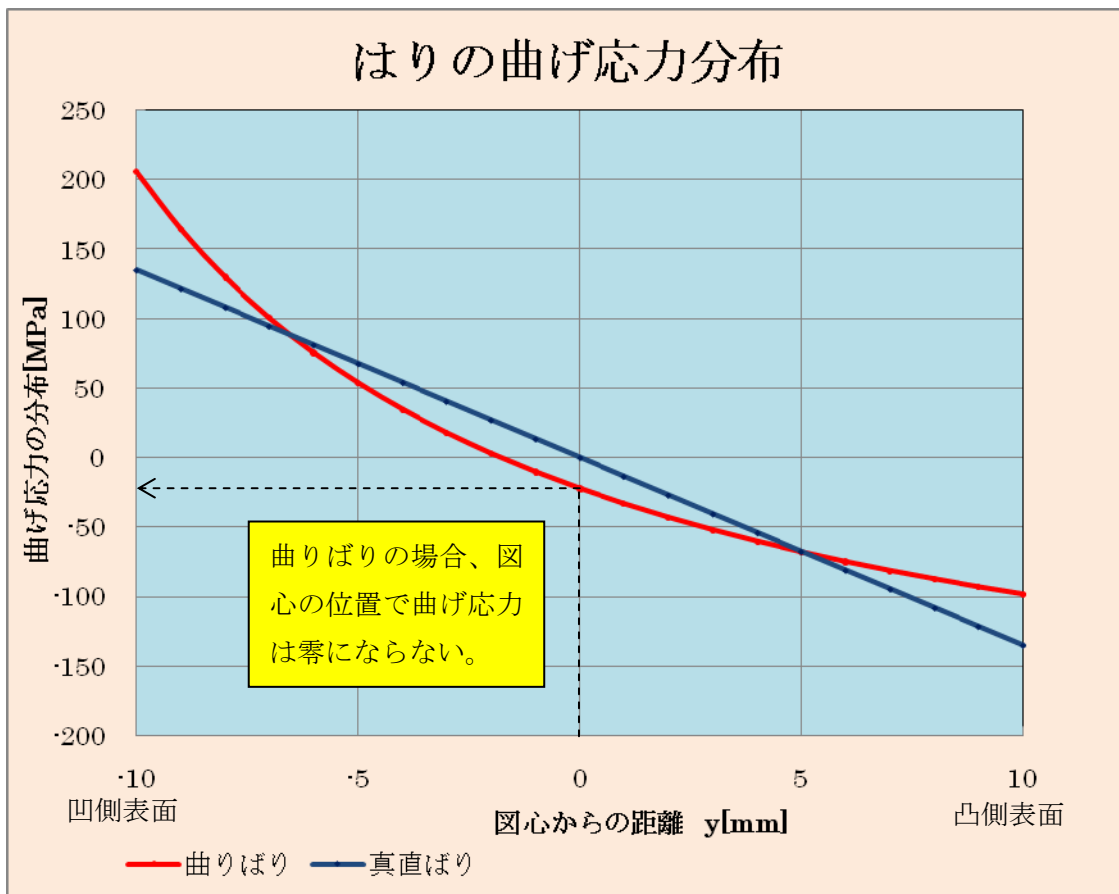


図7 はりの内部での曲げ応力の分布状態

また、図7 ははじめに述べた数値条件における曲りばり内部の曲げ応力分布状態を示したものである。図には同じ条件での真直ばりの場合を合わせて示してある。応力分布の違いがわかるであろう。

図5～図7は曲りばりの応力状態の一例を示しただけであり、任意の曲りばりに対してこの分布の形などをそのまま適用することはできないが、曲りばりの応力が高まることは理解できたと思う。図5、7はExcel等の表計算ソフトで比較的簡単にできるのでいろいろの計算を試してみるのもよいであろう。

なお、曲りばりの応力計算式である式(2)の誘導も原理として難しいところは少なく、数学的な扱いがやや厄介であるだけである。円形、長方形断面についての計算式は教科書にも示したが、式の誘導方法あるいはほかの断面形状の場合の結果などに興味のある方は、鶴戸口、川田、倉西共著、「材料力学」(裳華房)などを参考にされるとよいであろう。